

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
CURSO 2019-2020

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a tres bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

- a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.
- b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y .

EJERCICIO 2

- a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.
- b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

- a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2,36)$.
- b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.
- c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

EJERCICIO 4

- a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

- b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

- a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
- b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
- c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
- d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

EJERCICIO 6

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2 . De las bicicletas de la empresa E_1 , el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
- b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
- c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2 ?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

- a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.
- b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

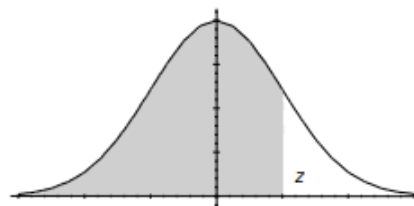
EJERCICIO 8

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ .

- a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?
- b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria “Renta media anual muestral”?
- c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES JULIO 2020

EJERCICIO 1. Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) (1 punto) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

En primer lugar, obtenemos el valor de B de la segunda expresión:

$$B \cdot Y = A \rightarrow B \cdot Y \cdot Y^{-1} = A \cdot Y^{-1} \rightarrow B = A \cdot Y^{-1}$$

Sustituyendo el valor de B en la primera expresión:

$$A \cdot X = B \rightarrow A \cdot X = A \cdot Y^{-1} \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot Y^{-1} \rightarrow X = Y^{-1}$$

b) (1.5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y .

Despejamos X de la primera expresión:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

La inversa de la matriz A se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Vamos a comprobarlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +3 & -1 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +3 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} +3 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & 3+2 \\ -2+0 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la segunda expresión:

$$B \cdot Y = A \rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot Y = B^{-1} \cdot A \rightarrow Y = B^{-1} \cdot A$$

La inversa de la matriz B se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

Vamos a comprobarlo:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } B \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(B^T) = \begin{pmatrix} +(-1) & -\square \\ -\square & +\square \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(B^T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$Y = B^{-1} \cdot A \rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 1 + \frac{3}{2} \\ 0 - 1 & 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

- a) (1 punto) Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5

frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

En primer lugar, se definen las variables del problema:

X : Nº horas de funcionamiento de la cadena A

Y : Nº horas de funcionamiento de la cadena B

Teniendo en cuenta esto, la función coste de producción es:

$$C(x, y) = 1200X + 1500Y$$

Y las condiciones son:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) (1.5 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Dibujamos las rectas que definen la región S del plano:

$$y = \frac{7-x}{2}, \quad y = 4x - 1, \quad y = 2x - 4, \quad y = \frac{20-3x}{2}, \quad x = 0, \quad y = 0$$

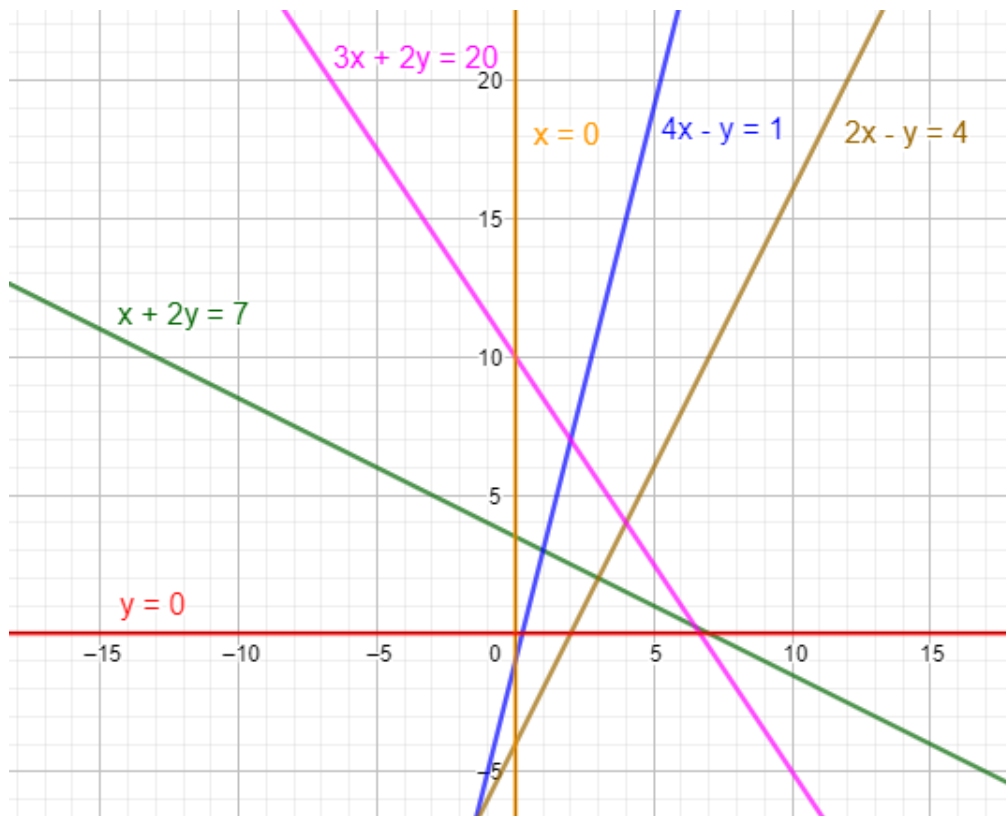
$$y = \frac{7-x}{2} \quad y = 4x - 1 \quad y = 2x - 4 \quad y = \frac{20-3x}{2}$$

x	y
5	1
3	2

x	y
0	-1
1	3

x	y
0	-4
1	-2

x	y
0	10
4	4



Cogemos un punto y comprobamos que cumple las condiciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(0,0)$:

$x + 2y \geq 7 \rightarrow ¿0 \geq 7?$ No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al lado contrario de recta.

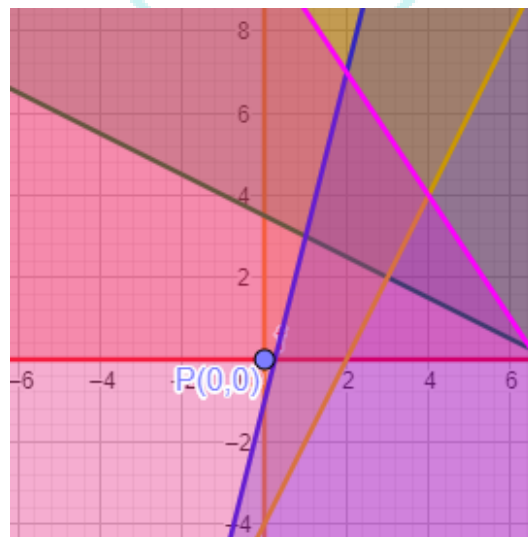
$4x - y \geq 1 \rightarrow ¿0 \geq 1?$ No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al lado contrario de recta.

$2x - y \leq 4 \rightarrow ¿0 \leq 4?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

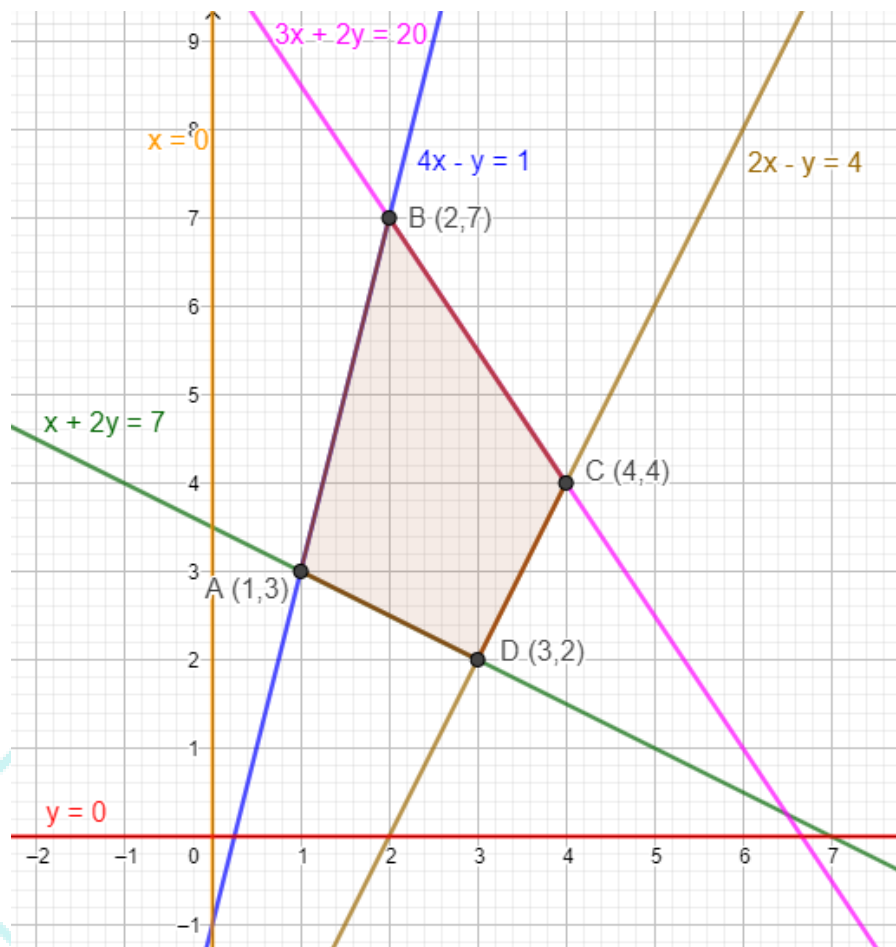
$3x + 2y \leq 20 \rightarrow ¿0 \leq 20?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

$x \geq 0 \rightarrow ¿0 \geq 0?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

$y \geq 0 \rightarrow ¿0 \geq 0?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Las coordenadas de sus vértices se pueden obtener gráficamente. También se pueden calcular resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$A(1,3) \quad B(2,7) \quad C(4,4) \quad D(3,2)$$

Valoramos la función $F(x,y) = 2x + y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A \rightarrow F(1,3) = 2 + 3 = 5 \leftarrow \text{MÍNIMO}$$

$$B \rightarrow F(2,7) = 4 + 7 = 11$$

$$C \rightarrow F(4,4) = 8 + 4 = 12$$

$$D \rightarrow F(3,2) = 6 + 2 = 8$$

El mínimo se alcanza en el punto $A(1,3)$, con un valor de 5.

EJERCICIO 3. Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

- a) (1 punto) Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

Si la función tiene un extremo relativo en ese punto, la derivada de la función en ese punto debe ser cero $f'(2) = 0$.

Además, en ese punto se cumple que $f(2) = 36$.

Derivando la función:

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Sustituyendo en ambas condiciones:

$$f(2) = 36 \rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 4 = 36$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas condiciones obtenemos los valores de a y b :

$$\begin{cases} 8a + 2b + 4 = 36 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 32 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} -8a - 2b = -32 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{x2} \begin{cases} -8a - 2b = -32 \\ 24a + 2b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 16a = -32$$
$$a = \frac{-32}{16} = -2$$

Sustituyendo a en la segunda condición:

$$12a + b = 0 \rightarrow 12 \cdot (-2) + b = 0 \rightarrow -24 + b = 0$$

$$b = 24$$

b) (0.75 puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

Para $a = 4$ y $b = -3$ la función queda:

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 4$$

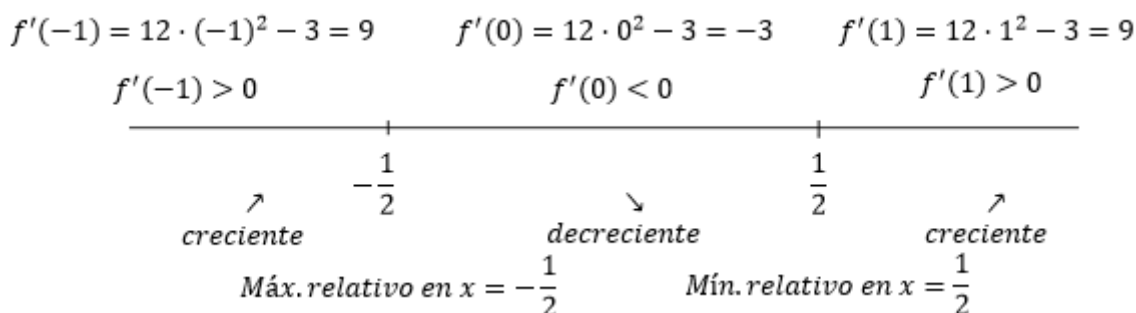
Para analizar el crecimiento de la función obtenemos las raíces de la primera derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 12x^2 - 3 = 0$$

$$12x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:



Por tanto, la función es creciente de $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y de $(\frac{1}{2}, \infty)$, y decreciente entre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un máximo relativo y en $x = \frac{1}{2}$ un mínimo relativo. Las coordenadas de estos extremos relativos son:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 5 \rightarrow \text{Máx. relativo}\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 \rightarrow \text{Mín. relativo}\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

c) (0.75 puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Para $a = 4$ y $b = -3$ la función queda:

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 4$$

En este apartado nos piden que calculemos $F(x)$, es decir, la primitiva de la función $f(x)$ que pasa por el punto $(2, 10)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 4x^3 - 3x + 4 \, dx = \int 4x^3 \, dx - \int 3x \, dx + \int 4 \, dx = \\ &= 4 \int x^3 \, dx - 3 \int x \, dx + \int 4 \, dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C \\ F(x) &= x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x + C \end{aligned}$$

Como debe cumplirse que $F(2) = 10$:

$$\begin{aligned} F(2) &= 2^4 - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 + C \xrightarrow{F(2)=10} 2^4 - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 + C = 10 \\ 16 - 6 + 8 + C &= 10 \rightarrow C = -8 \end{aligned}$$

Por tanto, la función $F(x)$ queda:

$$F(x) = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x - 8$$

EJERCICIO 4.

a) (1.2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

Para derivar $f(x)$ aplicamos la regla del producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$, teniendo en cuenta que $f = (-5 + x^2)^2$ y $g = e^{3x}$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}((-5 + x^2)^2) \cdot e^{3x} + \frac{d}{dx}(e^{3x}) \cdot (-5 + x^2)^2$$

$$\frac{d}{dx}((-5 + x^2)^2) = 2 \cdot (-5 + x^2) \cdot 2x = 4x \cdot (-5 + x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3 \cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \cdot (-5 + x^2) \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{3x} \cdot (-5 + x^2)^2 = \\ &= e^{3x} \cdot (-20x + 4x^3) + 3e^{3x} \cdot (x^4 - 10x^2 + 25) = \\ &= e^{3x}(-20x + 4x^3 + 3x^4 - 30x^2 + 75) = e^{3x}(3x^4 + 4x^3 - 30x^2 - 20x + 75) \end{aligned}$$

Para derivar $g(x)$ aplicamos la regla del cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$, teniendo en cuenta que $f = \ln(x^3 - 5x)$ y $g = 1 - x^2$:

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\ln(x^3 - 5x)) \cdot (1 - x^2) - \frac{d}{dx}(1 - x^2) \cdot (\ln(x^3 - 5x))}{(1 - x^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^3 - 5x)) = \frac{1}{x^3 - 5x} \cdot (3x^2 - 5) = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x}$$

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) = -2x$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x} \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot (\ln(x^3 - 5x))}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(3x^2 - 5) \cdot (1 - x^2)}{x^3 - 5x} - \frac{(-2x) \cdot (\ln(x^3 - 5x)) \cdot (x^3 - 5x)}{x^3 - 5x}}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 5) \cdot (1 - x^2) + 2x \cdot \ln(x^3 - 5x) \cdot (x^3 - 5x)}{(x^3 - 5x) \cdot (1 - x^2)^2}$$

b) (1.3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

En primer lugar, hay que comprobar si la función corta al eje de abscisas y en qué punto/s lo hace. Para ello, hay que igualar la y a cero:

$$h(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

Así, la función corta en dos puntos: $x = -1$, $x = 3$

Nos piden calcular el área para el recinto delimitado por la función y el eje OX. Por tanto, el área pedida es la definida entre -1 y 3.

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \int_{-1}^3 -x^2 + 2x + 3 \, dx = \int_{-1}^3 -x^2 \, dx + \int_{-1}^3 2x \, dx + \int_{-1}^3 3 \, dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{2 \cdot (-1)^2}{2} + 3 \cdot (-1) \right] = \\ &= [-9 + 9 + 9] - \left[\frac{1}{3} + 1 - 3 \right] = 9 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{27 - 1 + 6}{3} = \frac{32}{3} = 10,67 \, u^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO 5. A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

Definimos los sucesos:

A : Leer el primer libro recomendado.

B : Leer el segundo libro recomendado.

a) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.

La probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La probabilidad de que haya leído el primero es:

$$P(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$$

La probabilidad de que haya leído el segundo es:

$$P(B) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$$

La probabilidad de que haya leído ambos libros es:

$$P(A \cap B) = \frac{16}{120} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

Por tanto:

$$P(A \cup B) = \frac{23}{60} + \frac{17}{60} - \frac{8}{60} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} = 0,53$$

b) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.

La probabilidad de que no haya leído ningún libro es:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} = 0,47$$

c) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.

La probabilidad de que sólo lea el primer libro, es decir, que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B , es:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{23}{60} - \frac{8}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0,25$$

d) (0.7 puntos) Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que no ha ocurrido el suceso B .

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

La probabilidad de que no haya leído el segundo libro es:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{17}{60} = \frac{43}{60}$$

Sustituyendo:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{15/60}{43/60} = \frac{15}{43} = 0,35$$

EJERCICIO 6. Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una

empresa E_1 y el resto por una empresa E_2 . De las bicicletas de la empresa E_1 , el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

Se definen los siguientes sucesos:

E_1 : Estar gestionada por la empresa E_1 .

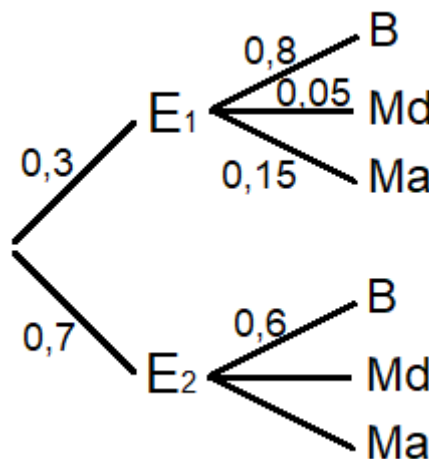
E_2 : Estar gestionada por la empresa E_2 .

B : Bicicleta de buena calidad.

Md : Bicicleta de media calidad.

Ma : Bicicleta de mala calidad.

El diagrama de árbol sería:



a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.

La probabilidad de que sea de buena calidad será:

$$P(B) = \text{Probabilidad de que sea de la empresa } E_1 \text{ y sea de buena calidad} + \\ + \text{Probabilidad de que sea de la empresa } E_2 \text{ y sea de buena calidad}$$

Es decir:

$$P(B) = P(E_1) \cdot P(B|E_1) + P(E_2) \cdot P(B|E_2) = \\ P(B) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,24 + 0,42 = 0,66$$

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

En este caso nos piden que cumpla dos requisitos: que sea de la empresa E_1 y de mala calidad ($P(E_1 \cap Ma)$). Observando el diagrama:

$$P(E_1 \cap Ma) = P(E_1) \cdot P(Ma|E_1) = 0,3 \cdot 0,15 = 0,045$$

c) (0.75 puntos) Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2 ?

Nos dicen que $P(Md) = 0,19$. Por tanto:

$$P(Md) = P(E_1) \cdot P(Me|E_1) + P(E_2) \cdot P(Me|E_2) =$$

$$P(Md) = 0,19 \rightarrow P(E_1) \cdot P(Me|E_1) + P(E_2) \cdot P(Me|E_2) = 0,19$$

Despejando:

$$P(Me|E_2) = \frac{0,19 - P(E_1) \cdot P(Me|E_1)}{P(E_2)} = \frac{0,19 - 0,3 \cdot 0,05}{0,7} = 0,25$$

EJERCICIO 7. La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

a) (1.5 puntos) Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.

Sea X la variable que representa el tiempo de vida útil de las lavadoras de un determinado modelo:

$$X \sim N(\mu, \sigma = \sqrt{7,84}) = N(\mu, \sigma = 2,8)$$

En primer lugar, hay que calcular la vida útil media de esta lavadora:

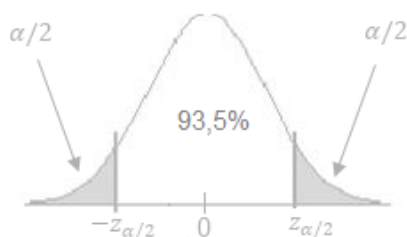
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{9,5 + 9 + 10,2 + 8,6 + 11,4 + 10,8 + 12,6 + 11 + 11,8 + 14,5 + 10,4 + 9,8}{12} =$$

$$\bar{x} = 10,8$$

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 93,5%, por lo que el nivel de significación (α) será:

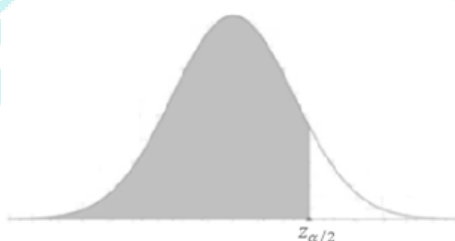
$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,935 = 0,065$$

Este área correspondiente al nivel de significación se reparte en dos partes iguales ($\alpha/2$), que es el área que queda a cada uno de los lados del nivel de confianza.



$$\alpha = 0,065 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,065}{2} = 0,0325$$

Ahora tengo que utilizar la tabla que me dan en el enunciado del examen para calcular el intervalo de confianza. Esta tabla sólo me da la posibilidad de obtener el área que queda a la izquierda de un cierto valor:



Por tanto, esa área que queda a la izquierda será la unidad menos $\alpha/2$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0325 = 0,9675$$

Me voy a la tabla y busco dentro el 0,9675. A partir de ese valor, me muevo a la izquierda para encontrar el valor entero y el primer decimal de z , y hacia arriba para encontrar el segundo decimal. En este caso, 0,9675 se encuentra entre dos valores, por lo que hay que hacer la media:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = \frac{1,84 + 1,85}{2} = 1,845$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Sustituyendo:

$$E = 1,845 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{12}} = 1,49$$

El intervalo de confianza sería:

$$I_{\mu} = (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (10,8 - 1,49, 10,8 + 1,49) = (9,31, 12,29)$$

b) (1 punto) Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

Como hemos visto, el error de estimación viene dado por:

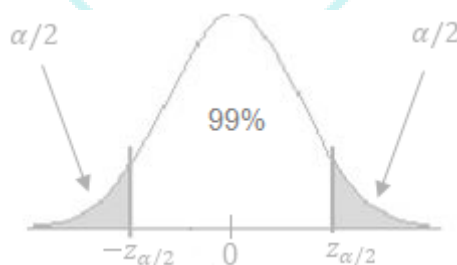
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como el nivel de confianza cambia, $z_{\alpha/2}$ también.

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 99%, por lo que el nivel de significación (α) será:

$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,99 = 0,01$$

El área que queda a cada uno de los lados del nivel de confianza será:



$$\alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005$$

Utilizo la tabla que me dan en el enunciado para calcular el intervalo de confianza, teniendo en cuenta que el área que queda a la izquierda será la unidad menos $\alpha/2$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$$

Me voy a la tabla y busco dentro el 0,995. A partir de ese valor, me muevo a la izquierda para encontrar el valor entero y el primer decimal de z , y hacia arriba para encontrar el segundo decimal. En este caso, 0,995 se encuentra entre dos valores, por lo que hay que hacer la media:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Sustituyendo:

$$E = 2,575 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{50}} = 1,02 \text{ años}$$

EJERCICIO 8. La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ .

- a) (1 punto) Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

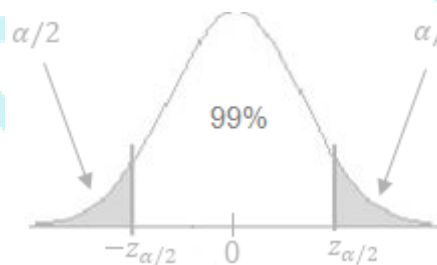
Sea X la variable que representa renta anual de los hogares andaluces:

$$X \sim N(\mu, \sigma = 5)$$

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 99%, por lo que el nivel de significación (α) será:

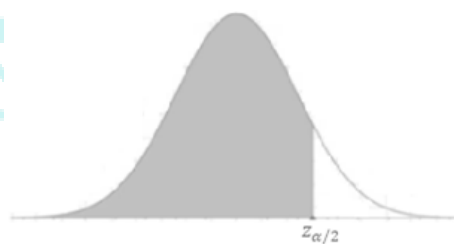
$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,99 = 0,01$$

Este área correspondiente al nivel de significación se reparte en dos partes iguales ($\alpha/2$), que es el área que queda a cada uno de los lados del nivel de confianza.



$$\alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005$$

Ahora tengo que utilizar la tabla que me dan en el enunciado del examen para calcular el intervalo de confianza. Esta tabla sólo me da la posibilidad de obtener el área que queda a la izquierda de un cierto valor:



Por tanto, esa área que queda a la izquierda será la unidad menos $\alpha/2$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$$

Me voy a la tabla y busco dentro el 0,995. A partir de ese valor, me muevo a la izquierda para encontrar el valor entero y el primer decimal de z , y hacia arriba para encontrar el segundo decimal. En este caso, 0,995 se encuentra entre dos valores, por lo que hay que hacer la media:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Sustituyendo:

$$1 = 2,575 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 2,575 \cdot 5 = 12,875 \rightarrow n = 12,875^2 = 165,77$$

Con este valor de $n = 165,77$ se obtiene un error de 1. Sin embargo, nos piden que el error sea inferior a 1, por lo que habría que aumentar el tamaño de la muestra, es decir, redondear al entero superior más cercano:

$$n = 166$$

b) (0.5 puntos) Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria “Renta media anual muestral”?

El Teorema Central del Límite nos da la siguiente caracterización para la distribución de las medias muestrales:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}}\right) \rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{5}{10}\right) \rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, 0,5)$$

c) (1 punto) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

$$\mu = 24 \rightarrow \bar{X} \sim N(\mu = 24, 0,5)$$

Como en este caso X sigue una distribución normal $N(\mu = 24, \sigma = 0,5)$, es necesario tipificar, es decir, hacer un cambio de variable para poder usar la tabla de distribución normal $N(0,1)$. Se tipificará la variable Z :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

Nos preguntan por $\bar{X} \geq 25$, por tanto:

$$P\left(Z \geq \frac{25 - 24}{0,5}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{0,5}\right) = P(Z \geq 2)$$

Buscamos en la tabla el valor que se corresponde con $Z = 2$:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890

$$Z = 2 \rightarrow P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$