

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREMO DEL EXAMEN:

El alumno elegirá solo TRES problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

- a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)
- b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3. Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

- a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.
- b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B, lo sea también del anticuerpo A.
- c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
- d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Halla la matriz inversa de A . (3 puntos)
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$. (3 puntos)

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

- a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)
- b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)
- c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)
- d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

- a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)
- b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)
- c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

SOLUCIONES JULIO 2020

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : N° de kilos del fertilizante A

y : N° de kilos del fertilizante B

Teniendo en cuenta esto, la función objetivo es el coste:

$$f(x, y) = 1,2x + 1,6y$$

Y las restricciones son:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,16y \geq 120 \rightarrow \text{Mínimo de 120 kg de nitrógeno} \\ 0,15x + 0,4y \geq 110 \rightarrow \text{Mínimo de 110 kg de fósforo} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \\ y \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \end{cases}$$

Expresando las inecuaciones con números enteros:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,16y \geq 120 \\ 0,15x + 0,4y \geq 110 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25x + 16y \geq 12000 \\ 15x + 40y \geq 11000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$$y = \frac{12000 - 25x}{16}, \quad y = \frac{11000 - 15x}{40}, \quad x = 0, \quad y = 0$$

$$y = \frac{12000 - 25x}{16}$$

x	y
0	750
480	0

$$y = \frac{11000 - 15x}{40}$$

x	y
0	275
400	125



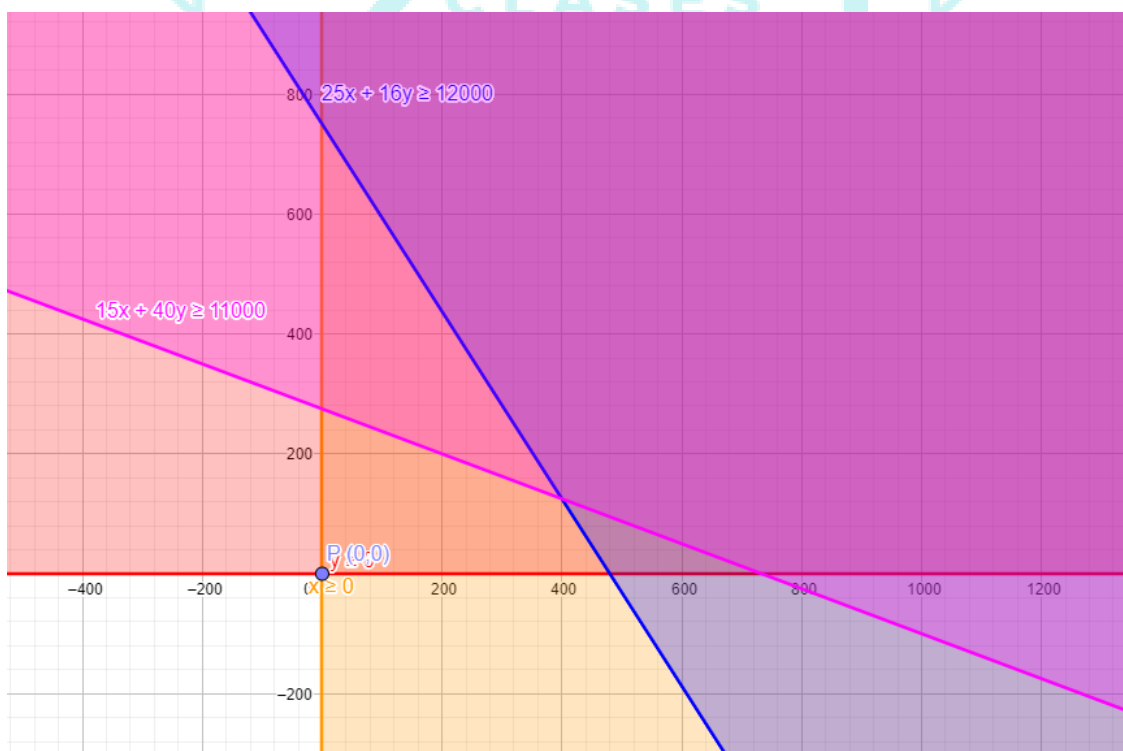
Cogemos un punto y comprobamos si cumple las condiciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(0,0)$:

$25x + 16y \geq 12000 \rightarrow 0 \geq 12000$? No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al otro lado.

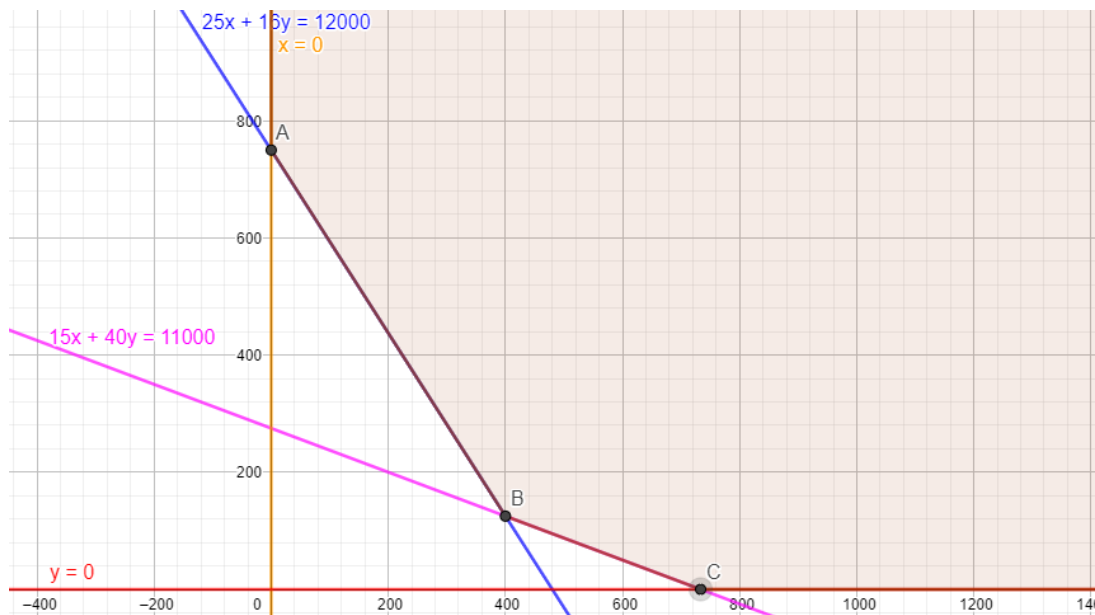
$15x + 40y \geq 11000 \rightarrow 0 \geq 11000$? No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al otro lado.

$x \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

$y \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Las coordenadas de sus vértices no se pueden obtener, de forma exacta, gráficamente. Por tanto, se calculan resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 25x + 16y = 12000 \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{12000 - 0}{16} \rightarrow y = 750 \rightarrow A(0, 750)$$

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 16y = 12000 \\ 15x + 40y = 11000 \end{array} \right\} \xrightarrow{x \cdot 3} \begin{array}{l} 75x + 48y = 36000 \\ -75x - 200y = -55000 \end{array} \xrightarrow{\text{Sumando}} -152y = -19000$$

$$y = 125 \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} 25x + 16 \cdot 125 = 12000 \rightarrow x = \frac{12000 - 16 \cdot 125}{25} \\ x = 400 \rightarrow B(400, 125)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 15x + 40y = 11000 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{11000 - 0}{15} \rightarrow x = 733.33 \rightarrow C(733.33, 0)$$

Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 1,2x + 1,6y$ en cada uno de los vértices de la región:

$$A \rightarrow f(0, 750) = 1,2 \cdot 0 + 1,6 \cdot 750 = 1200$$

$$B \rightarrow f(400, 125) = 1,2 \cdot 400 + 1,6 \cdot 125 = 680 \leftarrow \text{MÍNIMO}$$

$$C \rightarrow f(733.33, 0) = 1,2 \cdot 733.33 + 1,6 \cdot 0 = 880$$

El mínimo se alcanza en el punto $B(400, 125)$, con un valor de 680. Por tanto, con 400 kg de fertilizante A y 125 kg de fertilizante B el coste de fertilizar la parcela es mínimo.

b) ¿Cuál es este coste mínimo?

(2 puntos)

Como ya hemos calculado, el coste mínimo es de 680 euros.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

Al ser una función racional, el dominio son todos los números reales (todo $\mathbb{R}$) menos los valores que anulen el denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

A continuación, calculamos los puntos de corte con los ejes:

- Corte con el eje x: $y = 0$

$$y = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 0$$

$$2x^2 - 3x + 5 = 0 \cdot (x^2 - 1) \rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 40}}{4} \rightarrow \text{No existe (discriminante negativo)}$$

Por tanto, no hay punto de corte con el eje OX.

- Corte con el eje y: $x = 0$

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5}{0^2 - 1} \rightarrow y = \frac{5}{-1} = -5$$

Por tanto, el punto de corte con el eje OY es $P(0, -5)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, estos puntos ($x = -1$ y $x = 1$) son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{2 + 3 + 5}{0} = \frac{10}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Como } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \\ &\text{no existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{2 - 3 + 5}{0} = \frac{4}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ &\text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

- Asíntota horizontal: $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Como este límite es finito, existe asíntota horizontal en $y = 2$.

- Asíntota oblicua: $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

Derivamos la función e igualamos a cero:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (2x^2 - 3x + 5)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 4x - 3x^2 + 3 - 4x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$$3x^2 - 14x + 3 = 0 \cdot (x^2 - 1)^2 \rightarrow 3x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 36}}{6} = \frac{14 \pm \sqrt{160}}{6} = \begin{cases} \frac{14 + \sqrt{160}}{6} = 4,44 \\ \frac{14 - \sqrt{160}}{6} = 0,23 \end{cases}$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo del dominio para calcular el signo de la derivada:



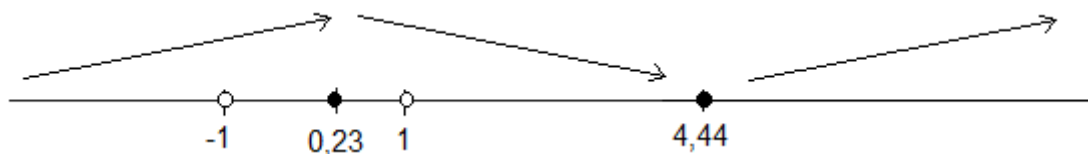
$$f'(0) = \frac{0-0+3}{(0-1)^2} = \frac{3}{(-1)^2} = 3; f'(2) = \frac{12-28+3}{(4-1)^2} = -\frac{13}{9}; f'(5) = \frac{75-70+3}{(25-1)^2} = \frac{8}{576}$$

$$3 > 0 \rightarrow \text{creciente}$$

$$-\frac{13}{9} < 0 \rightarrow \text{decreciente}$$

$$\frac{8}{576} > 0 \rightarrow \text{creciente}$$

Hay que tener en cuenta que, aunque el dominio no afecte al signo de la derivada, en esos puntos no existe función. Por tanto:



Por tanto, la función es creciente de $(-\infty, -1) \cup (-1, 0.23) \cup (4.44, \infty)$ y decreciente de $(0.23, 1) \cup (1, 4.44)$.

d) Los máximos y mínimos locales.

(2 puntos)

Como se puede observar en la recta anterior, en $x = 0.23$ presenta un máximo local y en $x = 4.44$ un mínimo local. Las coordenadas de estos extremos relativos son:

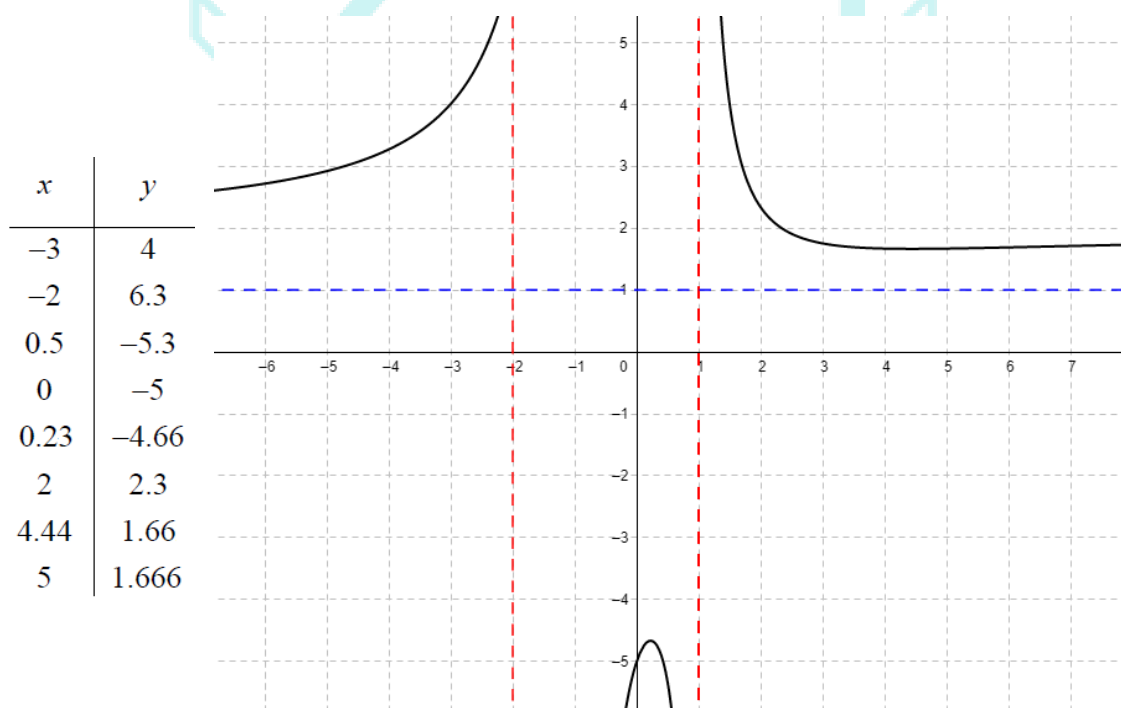
$$f(0.23) = \frac{2 \cdot 0.23^2 - 3 \cdot 0.23 + 5}{0.23^2 - 1} = \frac{4.416}{-0.947} = -4.66 \rightarrow \text{Máx.local}(0.23, -4.66)$$

$$f(4.44) = \frac{2 \cdot 4.44^2 - 3 \cdot 4.44 + 5}{4.44^2 - 1} = \frac{31.107}{18.714} = 1.66 \rightarrow \text{Min.local}(4.44, 1.66)$$

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

(2 puntos)

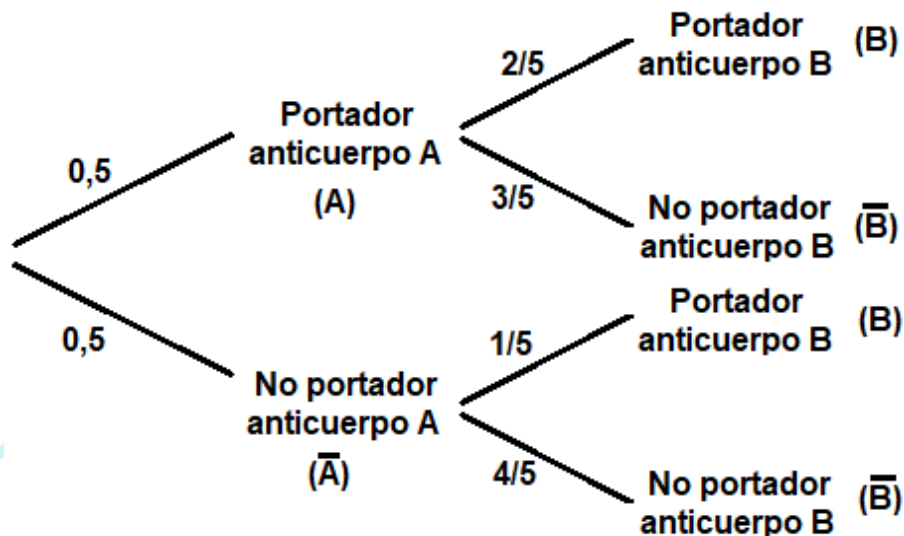
Hacemos una tabla de valores y representamos la función teniendo en cuenta las asíntotas y el dominio.



Problema 3. Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

- a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.

En primer lugar, realizamos el diagrama de árbol:



La probabilidad de que un habitante sea portador del anticuerpo B será:

$$P(B) = \text{Probabilidad de que sea portador del anticuerpo A y del anticuerpo B} + \\ + \text{Probabilidad de que no sea portador del anticuerpo A pero sí del B}$$

Es decir:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = \\ = 0,5 \cdot \frac{2}{5} + 0,5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3$$

- b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B, lo sea también del anticuerpo A.

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que un habitante sea portador del anticuerpo A sabiendo que es portador del anticuerpo B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B)$ establece la probabilidad de que ocurra el suceso B y ocurra el suceso A, es decir:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

La probabilidad de que sea portador del anticuerpo B ya la habíamos calculado en el apartado anterior ($P(B) = \frac{3}{10}$).

Así, tenemos:

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0,66$$

c) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

En este apartado nos preguntan, de nuevo, sobre probabilidad condicionada. Nos piden calcular la probabilidad de que un habitante no sea portador del anticuerpo A sabiendo que tampoco lo es del anticuerpo B:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ establece la probabilidad de que no ocurra el suceso B y ni el suceso A, es decir:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de que no sea portador del anticuerpo B ($P(\bar{B})$) es:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Así, tenemos:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = 0,57$$

d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

En este caso nos piden que el habitante cumpla dos requisitos: que sea portador del anticuerpo A y no lo sea del B ($P(A \cap \bar{B})$). Observando el diagrama:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = 0,5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0,3$$

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A .

(3 puntos)

La inversa de la matriz A se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Vamos a comprobarlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +2 & -5 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +2 & -5 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} +2 & -5 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.

(2 puntos)

Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Vamos a comprobarlo:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{La matriz } B \text{ no es invertible.}$$

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.

(2 puntos)

En primer lugar debemos calcular la matriz AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5 & 8+10 \\ 2+2 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Comprobamos su determinante para saber si es invertible:

$$|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 72 - 72 = 0 \rightarrow |AB| = 0 \rightarrow \text{La matriz } AB \text{ no es invertible}$$

d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

(3 puntos)

Despejamos X de la expresión:

$$AB - AX = BA \rightarrow AB - BA = AX$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (AB - BA)$$

$$X = A^{-1} \cdot (AB - BA)$$

Sustituyendo:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - BA \right)$$

Calculamos la matriz BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 & 10+8 \\ 2+2 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-8 & 18-18 \\ 4-4 & 8-9 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?

(2 puntos)

Nos piden calcular el valor de la función cuando $x = 6$:

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$$

Se obtendría un beneficio de 5 euros.

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

(2 puntos)

En primer lugar, deberíamos calcular las raíces de la función, es decir, cuando la función toma valor cero:

$$B(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0$$

$$B(x) = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 220}}{-2} = \frac{-16 \pm \sqrt{36}}{-2} =$$

$$= \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-16 + 6}{-2} = 5 \\ \frac{-16 - 6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Analizamos cada tramo entre estos intervalos para comprobar cuando es positiva:



$$B(0) = -0^2 + 16 \cdot 0 - 55 = -55 \quad B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5 \quad B(12) = -12^2 + 16 \cdot 12 - 55 = -7$$

$$B(x) < 0 \qquad B(x) > 0 \qquad B(x) < 0$$

El beneficio es positivo en (5,11) por lo que se debe fijar un precio por caja mayor que 5 y menor que 11.

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)

Para obtener los extremos hay que derivar la función e igualarla a cero:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \rightarrow B'(x) = -2x + 16$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow -2x + 16 = 0 \rightarrow x = 8$$

Para comprobar si se trata de un máximo o un mínimo debemos hacer la segunda derivada:

$$B''(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{máximo}$$

Por tanto, el beneficio es máximo en $x = 8$, es decir, cuando la caja cuesta 8 euros el beneficio obtenido es máximo.

Este beneficio máximo es de:

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$$

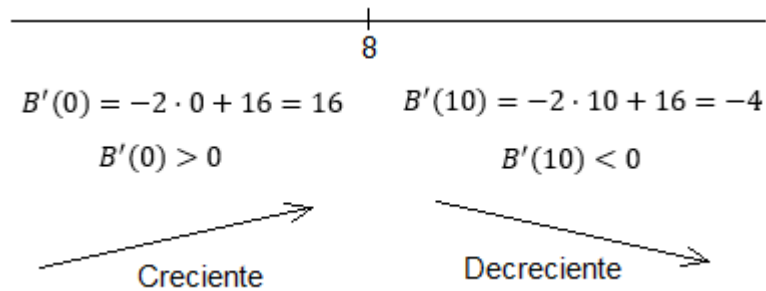
Si la caja cuesta 8 euros se obtiene 9 euros de beneficio.

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Como hemos visto, la primera derivada vale cero cuando $x = 8$:

$$B'(x) = 0 \rightarrow -2x + 16 = 0 \rightarrow x = 8$$

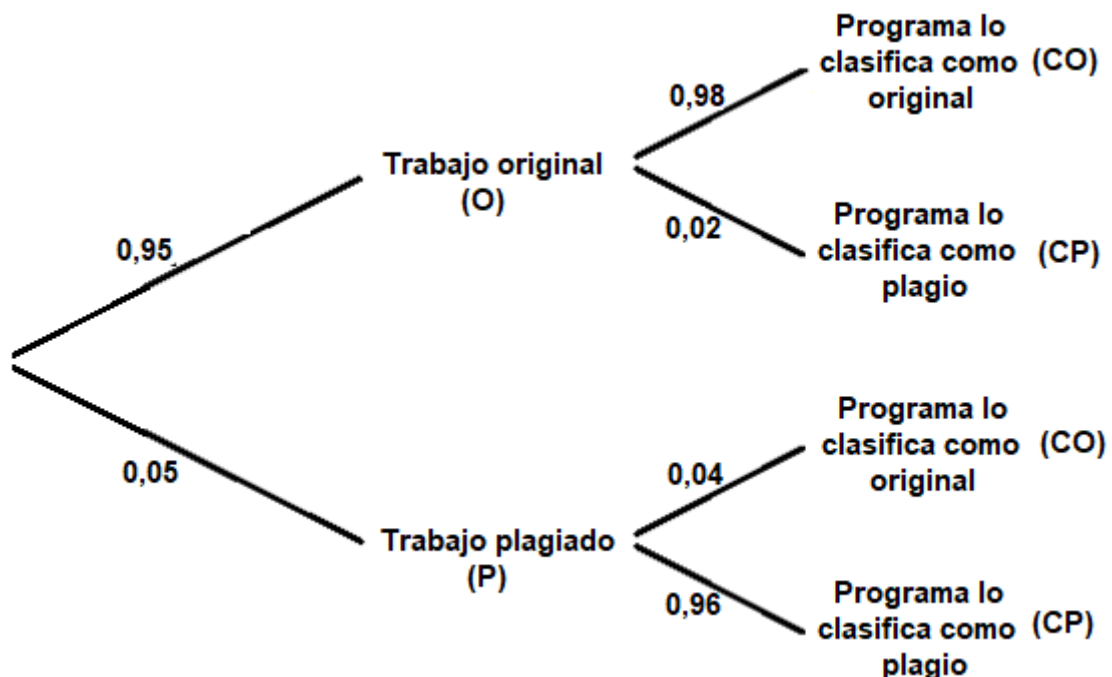
Tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:



El beneficio es creciente para precios de 0 a 8 euros, y decreciente a partir de los 8 euros.

Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

Realizamos el diagrama de árbol:



- a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)

La probabilidad de que un trabajo sea clasificado como plagio es:

$$P(CP) = \text{Probabilidad de que sea original y se clasifique como plagio} + \\ + \text{Probabilidad de que sea plagio y se clasifique como tal}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} P(CP) &= P(O) \cdot P(CP|O) + P(P) \cdot P(CP|P) = \\ &= 0,95 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,96 = 0,019 + 0,048 = 0,067 \end{aligned}$$

- b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)**

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que un trabajo sea plagio (P) sabiendo que ha sido clasificado como original (CO):

$$P(P|CO) = \frac{P(P \cap CO)}{P(CO)}$$

$P(P \cap CO)$ establece la probabilidad de que ocurra el suceso CO y ocurra el suceso P, es decir:

$$P(P \cap CO) = P(P) \cdot P(CO|P) = 0,05 \cdot 0,04 = 0,002$$

La probabilidad de que sea clasificado como original $P(CO)$ es:

$$P(CO) = 1 - P(CP) = 1 - 0,067 = 0,933$$

Así, tenemos:

$$P(P|CO) = \frac{0,002}{0,933} = 0,0021$$

- c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)**

En este caso nos piden que el trabajo cumpla dos requisitos: que sea plagio y que sea clasificado como tal por el programa ($P(A \cap \bar{B})$). Observando el diagrama:

$$P(P \cap CP) = P(P) \cdot P(CP|P) = 0,05 \cdot 0,96 = 0,048$$