

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.
Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.
Quantes publicacions va vendre de cada tipus?
[2,5 punts]
2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).
 - a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any?
Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.
[1,25 punts]
 - b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval $[0, 12]$ i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.
[1,25 punts]
3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.
 - a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.
[1,25 punts]

- b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?
[1,25 punts]
4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.
- a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]
- b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici?
[1,25 punts]
5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- a) Comproveu que es compleix que $A^{-1} = A^2$.
[1,25 punts]
- b) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]
6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:
- $$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9}$$
- a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?
[1,25 punts]
- b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.

Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

[2,5 punts]

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : N° de comics que vende

y : N° de revistas que vende

z : N° de novelas que vende

Teniendo en cuenta esto, nos dicen que:

- Cobra de comisiones 1 euro por cada comic que vende, 1,5 euros por cada revista y 2 euros por cada novela, cobrando en total 30 euros en comisiones:

$$1x + 1,5y + 2z = 30$$

- Vende el doble de revistas que de novelas:

$$y = 2z$$

- Vende 5 comics menos que revistas:

$$x = y - 5$$

Juntando estas ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 2z = 30 \\ y = 2z \\ x = y - 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Ordenando y pasando los decimales a fracción}} \left. \begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y + 2z = 30 \\ y - 2z = 0 \\ x - y = -5 \end{array} \right\}$$

Expresamos en forma matricial y resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5/2 & -2 & -35 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + \frac{5}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -35 \end{array} \right)$$

Quedando así:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 2z = 30 \\ y - 2z = 0 \\ -7z = -35 \end{array} \right\} \rightarrow z = 5 \xrightarrow{z=5} y - 2 \cdot 5 = 0 \rightarrow y = 10$$

$$x + 1,5y + 2z = 30 \xrightarrow{y=10, z=5} x + 1,5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 30 \rightarrow x + 15 + 10 = 30 \rightarrow x = 5$$

Vende 5 comics, 10 revistes y 5 novel·les.

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any?

Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.

[1,25 punts]

Nos preguntan cuántas unidades se han vendido al tercer mes ($f(3)$) y al final del año ($f(12)$):

$$f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1470 \cdot 3 = 270 - 1890 + 4410 = 2790 \text{ unidades}$$

$$f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1.470 \cdot 12 = 17280 - 30240 + 17640 = 4680 \text{ unidades}$$

La tasa de variación media (TVM) en una función es el valor medio que toma la y con respecto a las variaciones de x en un intervalo cerrado. La TVM entre el mes 3 y 12 es:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow TVM[3, 12] = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4680 - 2790}{12 - 3} = 210$$

b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval $[0, 12]$ i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.

[1,25 punts]

Derivamos la función e igualamos a cero:

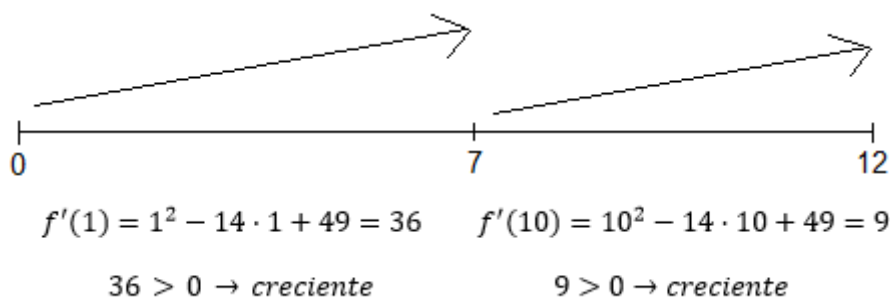
$$f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 10x^2 - 2 \cdot 210x + 1.470 =$$

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1.470$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 30x^2 - 420x + 1.470 = 0$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada (hay que tener en cuenta que son meses de un año, por tanto el intervalo es de 0 a 12):



Así, queda comprobado que la función es creciente en todo el intervalo $[0, 12]$.

También nos piden calcular en qué instante el crecimiento es más lento, es decir, dónde alcanza la derivada el valor más pequeño. Como hemos visto que la derivada es siempre mayor o igual a cero, el valor más pequeño será en $x = 7$, que es cuando $f'(x) = 0$. Por lo que el crecimiento es más lento en el mes 7 (Julio).

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.
[1,25 punts]

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : N° de euros que aumenta o disminuye el precio del menú

y : N° de clientes

Nos dicen que el número de clientes dependen del precio del menú de manera lineal, es decir:

$$y = mx + n$$

Un estudio nos indica que si el precio del menú es de 18 euros ($x = 0$), el número de clientes es de 120. Si el precio del menú aumenta 1 euro ($x = 1$), disminuye en 4 el número de clientes, por lo que serían $120 - 4 = 116$.

Con estos datos hacemos un sistema para determinar el valor de m y n :

$$\begin{cases} 120 = m \cdot 0 + n \\ 116 = m \cdot 1 + n \end{cases} \rightarrow 120 = n \xrightarrow{n=120} 116 = m + 120 \rightarrow m = -4$$

Así, la función lineal que relaciona el precio del menú con el número de clientes es:

$$y = -4x + 120$$

Cada menú tiene un coste de elaboración de 8 euros, y se vende por $18 + x$, por tanto, el beneficio por menú es de:

$$\text{Beneficio} = \text{Precio menú} - \text{Coste fabricación} = 18 + x - 8 = 10 + x$$

El número de menús, que se venden es y , por tanto, el beneficio total dependerá el número de menús vendidos:

$$B(x, y) = (10 + x) \cdot y$$

Como conocemos la ecuación que relaciona ambas variables, la sustituimos:

$$B(x) = (10 + x) \cdot y \xrightarrow{y=-4x+120} B(x) = (10 + x) \cdot (-4x + 120)$$

$$B(x) = -40x - 4x^2 + 1200 + 120x \rightarrow B(x) = -4x^2 + 80x + 1200$$

b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?

[1,25 punts]

Derivamos la función e igualamos a cero:

$$B(x) = -4x^2 + 80x + 1200 \rightarrow B'(x) = -8x + 80 =$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow -8x + 80 = 0 \rightarrow -8x = -80 \rightarrow x = 10$$

En $x = 10$ hay un extremo relativo. Para saber si se trata de un máximo o un mínimo, hacemos la segunda derivada y valoramos el valor que toma cuando $x = 10$:

$$B''(x) = -8 \rightarrow B''(10) = -8 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

Por tanto, se obtiene el máximo beneficio cuando $x = 10$, es decir, con una subida de precio de 10 euros. Así:

$$\text{Precio menú} = 18 + x = 18 + 10 = 28 \text{ euros}$$

$$B(10) = -4 \cdot 10^2 + 80 \cdot 10 + 1200 = -400 + 800 + 1200 = 1600 \text{ euros}$$

El precio del menú con el que se obtendría el máximo beneficio es de 28 euros, y el beneficio que se obtendría sería de 1600 euros.

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : N^o de sillas (cadires) que fabrica en un mes

y : N^o de mesas (taules) que fabrica en un mes

La función objetivo que queremos maximizar es el beneficio. Teniendo en cuenta el beneficio que aporta cada mesa y cada silla, la función objetivo es:

$$B(x, y) = 20x + 25y$$

Y las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \rightarrow \text{Al mes se puede producir como máximo 120 muebles} \\ x \leq 100 \rightarrow \text{Como máximo se pueden fabricar 100 sillas} \\ y \geq 10 \rightarrow \text{Se deben fabricar como mínimo 10 mesas} \\ x \geq 3y \rightarrow \text{El número de sillas ha de ser mayor o igual al triple de mesas} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \\ y \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \end{cases}$$

Como $y \geq 10$, esta condición ya implica que $y \geq 0$, por tanto, se puede obviar esta última condición. Así mismo, como $x \geq 3y$ e $y \geq 0$, inevitablemente $x \geq 0$, por lo que también se puede obviar esta condición. Así, nos quedan las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$$y = 120 - x, \quad x = 100, \quad y = 10, \quad y = \frac{x}{3}$$

x	y
0	120
120	0

x	y
0	10
60	10

x	y
0	0
60	20



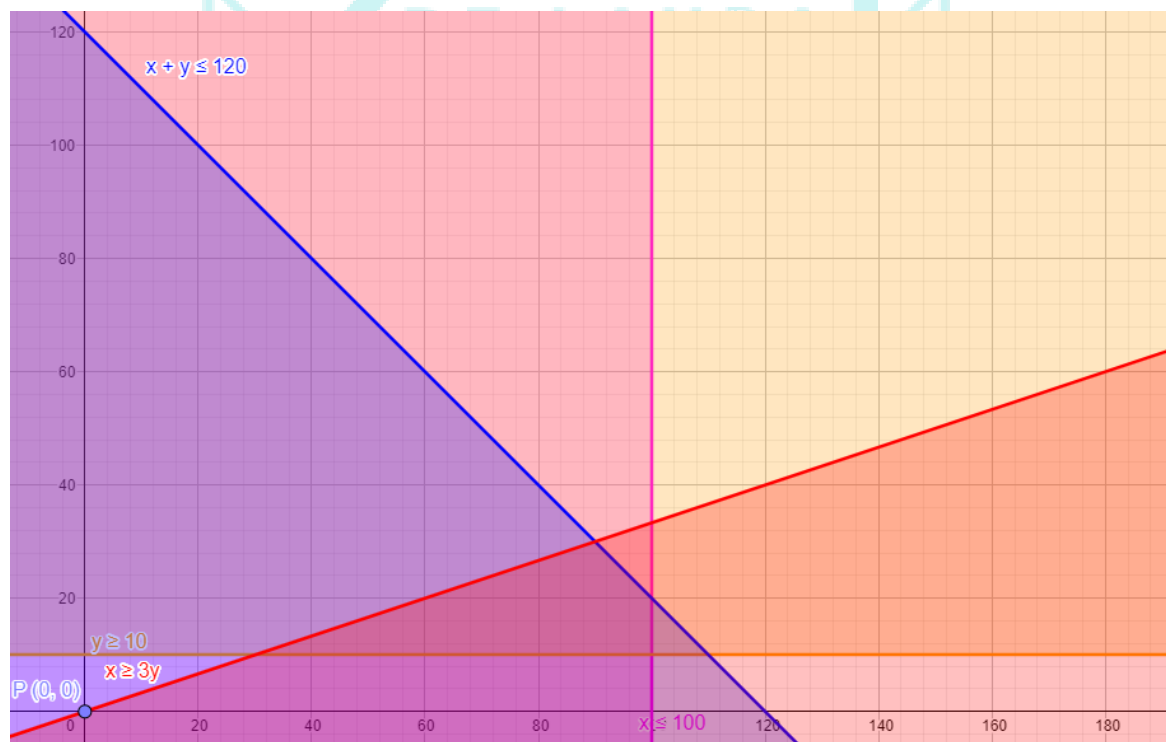
Cogemos un punto y comprobamos que cumple las restricciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(0,0)$:

$x + y \leq 120 \rightarrow \text{¿} 0 \leq 120 \text{? Sí} \rightarrow \text{Se cumple para ese lado de la recta.}$

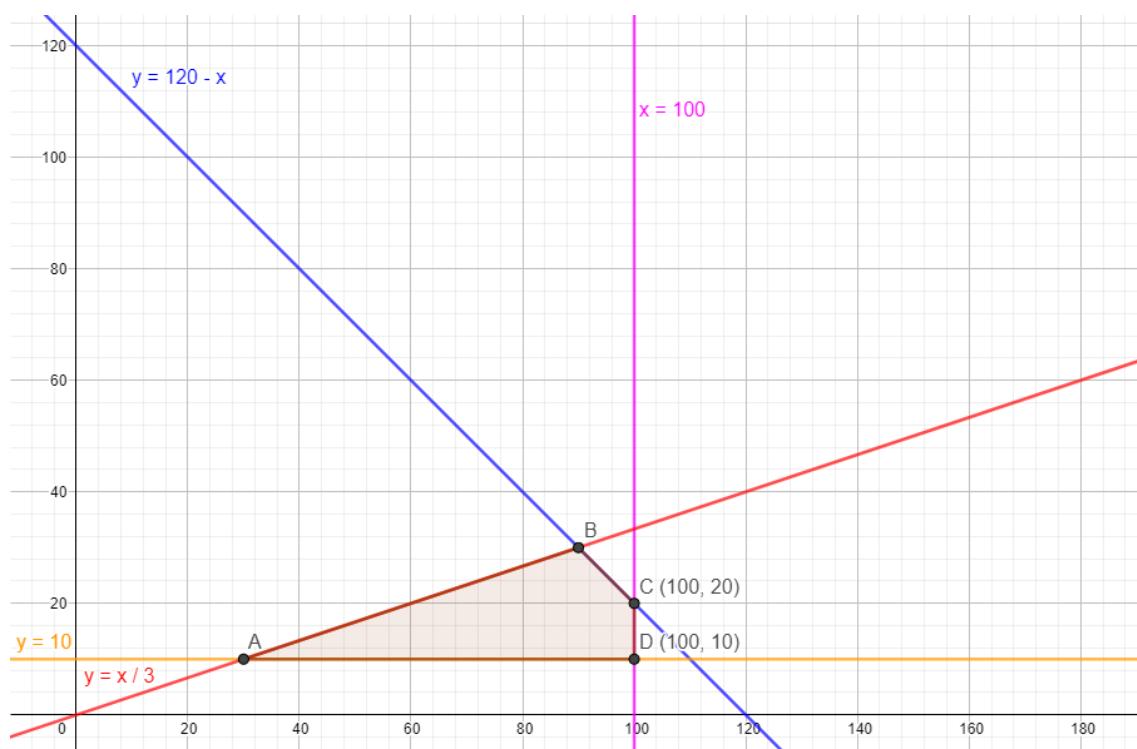
$x \leq 100 \rightarrow \text{¿} 0 \leq 100 \text{? Sí} \rightarrow \text{Se cumple para ese lado de la recta.}$

$y \geq 10 \rightarrow \text{¿} 0 \geq 10 \text{? No} \rightarrow \text{Se cumple para punto situado al lado contrario de la recta.}$

$x \geq 3y \rightarrow \text{¿} 0 \geq 0 \text{? Sí} \rightarrow \text{Se cumple para ese lado de la recta.}$



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Algunas coordenadas de sus vértices se pueden obtener gráficamente. Las demás se pueden calcular resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{3} \\ y = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{en la 1ª ecuación}]{\text{sustituyendo}} 10 = \frac{x}{3} \rightarrow x = 30 \Rightarrow A(30, 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{3} \\ y = 120 - x \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{igualando}} \frac{x}{3} = 120 - x \rightarrow x = 360 - 3x \rightarrow 4x = 360 \rightarrow x = 90$$

$$y = 120 - x \xrightarrow{x=90} y = 120 - 90 = 30 \Rightarrow B(90, 30)$$

$$C(100, 20) \quad D(100, 10)$$

b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici?

[1,25 punts]

Valoramos la función $B(x, y) = 20x + 25y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A \rightarrow B(30, 10) = 20 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 600 + 250 = 850$$

$$B \rightarrow B(90, 30) = 20 \cdot 90 + 25 \cdot 30 = 1800 + 750 = 2550 \leftarrow \text{MÁXIMO}$$

$$C \rightarrow B(100, 20) = 20 \cdot 100 + 25 \cdot 20 = 2000 + 500 = 2500$$

$$D \rightarrow B(100, 10) = 20 \cdot 100 + 25 \cdot 10 = 2000 + 250 = 2250$$

El máximo se alcanza en el punto $B(90, 30)$, con un valor de 2550. Es decir, lo que más beneficio reportaría sería fabricar 90 sillas y 30 mesas, obteniendo 2550 euros de beneficio.

5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $A^{-1} = A^2$.

[1,25 punts]

La inversa de la matriz A se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +(-1) & -\square \\ -\square & +\square \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +(-1) & -1 \\ -(-1) & +0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-1 \\ 0+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

Despejamos X :

$$A \cdot X + B = I \rightarrow A \cdot X = I - B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (I - B) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (I - B)$$

Sustituyendo:

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-2 & 0-1 \\ 0-1 & 1-2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9}$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?

[1,25 punts]

Nos piden calcular el beneficio en el momento en el que la empresa comienza a funcionar, es decir, en el mes cero ($x = 0$):

$$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9} \rightarrow B(0) = \frac{5 \cdot 0 + 20}{0^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{20}{9} - \frac{20}{9} = 0$$

El beneficio en los inicios de la empresa es cero.

También nos piden calcular el momento en el que la empresa comienza a tener pérdidas, es decir, el beneficio pasa de ser positivo a ser negativo. Para ello, vamos a averiguar cuando se anula la función:

$$B(x) = 0 \rightarrow \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9} = 0 \rightarrow \frac{5x + 20}{x^2 + 9} = \frac{20}{9} \rightarrow 9 \cdot (5x + 20) = 20 \cdot (x^2 + 9)$$

$$45x + 180 = 20x^2 + 180 \rightarrow 20x^2 - 45x = 0 \rightarrow 5x \cdot (4x - 9) = 0$$

$$5x \cdot (4x - 9) = 0 \begin{cases} 5x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 4x - 9 = 0 \rightarrow 4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25 \end{cases}$$

Como el momento 0 es cuando se inicia la empresa, antes de ese momento no tiene sentido estudiar la función. Por tanto, al ser una función polinómica, estudiaremos el comportamiento de la función antes y después de 2,25:

2,25

$$B(2) = \frac{5 \cdot 2 + 20}{2^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{30}{13} - \frac{20}{9} = \frac{10}{117} \quad B(3) = \frac{5 \cdot 3 + 20}{3^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{35}{18} - \frac{20}{9} = -\frac{5}{18}$$

$$B(2) = \frac{10}{117} > 0$$

$$B(3) = -\frac{5}{18} < 0$$

El beneficio es positivo hasta los 2,25 años (2 años y tres meses). A partir de este momento la empresa comienza a tener pérdidas.

b) En quin moment aconseguix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?

[1,25 punts]

Derivamos la función e igualamos a cero:

$$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9} \xrightarrow{\text{Regla de la diferencia } (f-g)' = f' - g'} B'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{5x + 20}{x^2 + 9} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{20}{9} \right)$$

$$B'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{5x + 20}{x^2 + 9} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{20}{9} \right) \xrightarrow{\text{Regla del cociente primera derivada } \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}} B'(x) = \frac{5 \cdot (x^2 + 9) - 2x \cdot (5x + 20)}{(x^2 + 9)^2} - 0$$

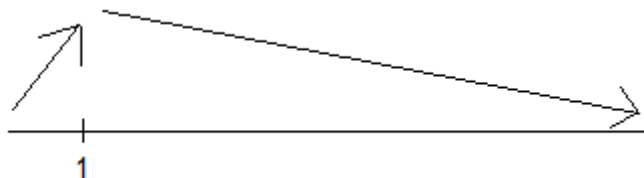
$$B'(x) = \frac{5x^2 + 45 - 10x^2 - 40x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2 + 9)^2}$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2 + 9)^2} = 0 \rightarrow -5x^2 - 40x + 45 = 0 \cdot (x^2 + 9)^2$$

$$-5x^2 - 40x + 45 = 0 \rightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 45}}{2 \cdot (-5)} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 900}}{-10}$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{2500}}{-10} = \frac{40 \pm 50}{-10} = \begin{cases} \frac{40 + 50}{-10} = \frac{90}{-10} = -9 \rightarrow \text{Lo descartamos porque no tiene sentido un año negativo} \\ \frac{40 - 50}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1 \end{cases}$$

Estudiaremos el comportamiento de la función antes y después de 1:



$$B'(0,5) = \frac{-5 \cdot 0,5^2 - 40 \cdot 0,5 + 45}{(0,5^2 + 9)^2} = \frac{-1,25 - 20 + 45}{85,5625} = 0,28 > 0 \rightarrow \text{creciente}$$

$$B'(2) = \frac{-5 \cdot 2^2 - 40 \cdot 2 + 45}{(2^2 + 9)^2} = \frac{-20 - 80 + 45}{169} = -0,33 < 0 \rightarrow \text{decreciente}$$

La función presenta un máximo en $x = 1$. Por tanto, la empresa obtiene su máximo beneficio en el año 1, que asciende a:

$$B(1) = \frac{5 \cdot 1 + 20}{1^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = 0,28 \quad \begin{array}{l} \text{Como está expresado} \\ \text{en millones de euros} \end{array} \quad B(1) = 277.777,78 \text{ euros}$$

