

INTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a + 1)z = a \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

- a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
- b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$
- b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

A.4. (2 puntos)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

- a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
- b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

- a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
- b) Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
- Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

- Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .
- Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{2}}$$

- Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
- Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

- Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
- Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

- En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

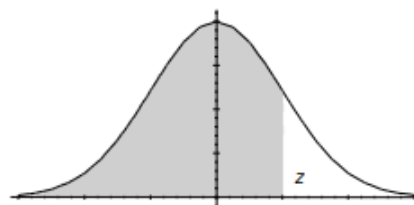
40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

- A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

A.1. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro a .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array} \right\} \rightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro a para que se anule el determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 2a - [2a + a \cdot (a+1)] = 2a - [2a + a^2 + a] = 2a - 2a - a^2 - a \\ &= -a^2 - a \end{aligned}$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow -a^2 - a = 0 \rightarrow -a(a+1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} -a = 0 \rightarrow a = 0 \\ a+1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{array}$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1:** $a \neq 0, a \neq -1$

$$(A) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{array} \right) \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array} \right)$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 \quad |A^*| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Como:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{n}^\circ \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2:** $a = -1$

$$(A) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (1) = -1 \rightarrow |A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow \text{Sistema Incompatible (SI)} \\ \text{No tiene solución}$$

- Caso 3: $a = 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Si $a = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ \rightarrow z = 0 \end{array}$$

Para resolver este sistema, de infinitas soluciones, es necesario fijar parámetros:

$$N^{\circ} \text{ parámetros} = N^{\circ} \text{ incógnitas} - N^{\circ} \text{ ecuaciones no nulas} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, hay que fijar un parámetro, que será el único que desconocemos:

$$y = \lambda$$

Así, las soluciones son:

$$x = 0$$

$$y = \lambda$$

$$z = 0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

A.2. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

Al ser una función racional, el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador:

$$3x + x^2 = 0 \rightarrow x(3 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 + x = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

Tenemos que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0}{0} + 4 \rightarrow \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{0}{0} + 4 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4 - x^2)}{x(3 + x)} + 4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

Para que exista continuidad, debe coincidir el límite en el punto 0 y con el valor que toma la función en ese punto ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$).

Por tanto, $f(0) = \frac{16}{3}$ para conseguir que la función sea continua en $x = 0$.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, estos puntos ($x = 0$ y $x = -3$) son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales.

En $x = 0$ hemos visto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{0}{0} + 4 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4 - x^2)}{x(3 + x)} + 4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

La función no tiene asíntota vertical en $x = 0$.

En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{15}{0} + 4 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(4 - x^2)}{x(3 + x)} + 4 = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{-5}{0} + 4 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{-5}{0^+} + 4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{-5}{0^-} + 4 = \infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \end{array}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = -3$.

- Asíntota horizontal: $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{\infty}{\infty} + 4 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación dejamos en el numerador y en el denominador sólo el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^2} + 4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x + 4 = -\infty$$

No hay asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x - x^3 + 12x + 4x^2}{3x + x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \end{aligned}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x + 3x^2 + x^3}{3x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 16x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2}{x^2} = 7 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es: $y = -x + 7$

A.3. Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$**

La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Hay que calcular la pendiente de la recta tangente, que viene dada por la derivada de la función:

$$m(x) = f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x$$

Para $x_0 = -1$:

$$f(x_0) = f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 4 + 3 - 4 = 3$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - 0 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 3$$

- b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.**

En primer lugar, hay que comprobar si la función corta al eje de abscisas y en qué punto/s lo hace. Para ello, hay que igualar la y a cero:

$$f(x) = 0 \rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (-x^2 + x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

Así, la función corta en tres puntos: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$

Nos piden calcular el área para el recinto delimitado por la función y el eje OX para valores mayores de cero. Por tanto, el área pedida es el valor absoluto de la integral de la función definida entre 0 y 2.

$$\text{Área}(S) = \int_0^2 -x^4 + x^3 + 2x^2 \, dx = \int_0^2 -x^4 \, dx + \int_0^2 x^3 \, dx + \int_0^2 2x^2 \, dx =$$

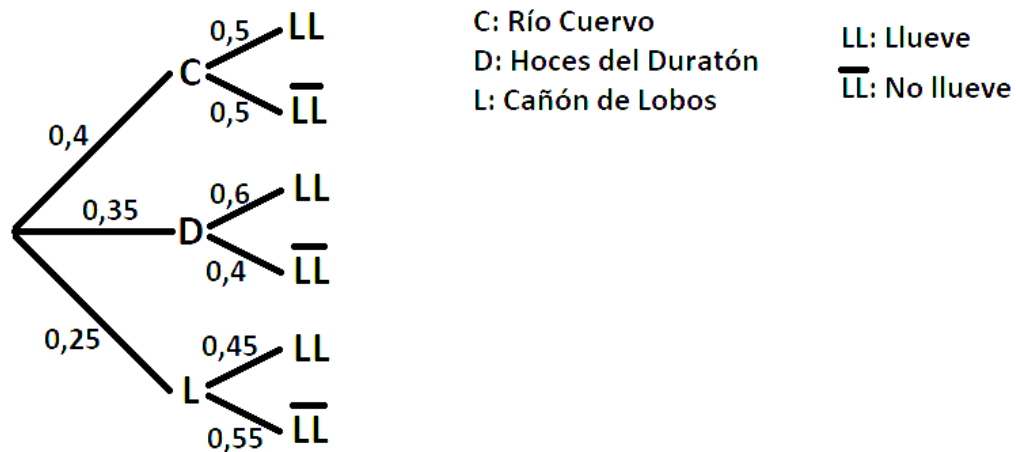
$$= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[-\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + 2 \cdot \frac{2^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^5}{5} + \frac{0^4}{4} + 2 \cdot \frac{0^3}{3} \right] =$$

$$= \left[-\frac{32}{5} + \frac{16}{4} + 2 \cdot \frac{8}{3} \right] - [0] = -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{-96 + 60 + 80}{15} = \frac{44}{15} = 2,93 \text{ u}^2$$

A.4. Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

En primer lugar, realizamos el diagrama de árbol:



La probabilidad de que no llueva será:

$$P(\overline{LL}) = \text{Probabilidad de que no llueva en el Río Cuervo} +$$

$$+ \text{Probabilidad de que no llueva en las Hoces del Duratón} +$$

$$+ \text{Probabilidad de que no llueva en el Cañón de Lobos}$$

Es decir:

$$P(\overline{LL}) = P(\overline{LL}|C) \cdot P(C) + P(\overline{LL}|D) \cdot P(D) + P(\overline{LL}|L) \cdot P(L) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,35 + 0,55 \cdot 0,25 = 0,2 + 0,14 + 0,1375 = 0,4775$$

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que el socio haya ido al río Cuervo sabiendo que ha llovido:

$$P(C|LL) = \frac{P(C \cap LL)}{P(LL)}$$

$P(C \cap LL)$ establece la probabilidad de que ocurra el suceso LL y ocurra el suceso C , es decir:

$$P(C \cap LL) = P(LL|C) \cdot P(C) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

La probabilidad de que llueva ($P(LL)$) es:

$$P(LL) = 1 - P(\overline{LL}) = 1 - 0,4775 = 0,5225$$

Así, tenemos:

$$P(C|LL) = \frac{0,2}{0,5225} = 0,3828$$

A.5. La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

- a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

Sea X la variable que representa la longitud de escritura de un bolígrafo en km.

$$X \sim N(\mu, \sigma = 0,5)$$

El intervalo de confianza supone encontrar dos valores simétricos respecto a la media ($-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$), entre los cuáles se encierre un porcentaje, denominado nivel de confianza:



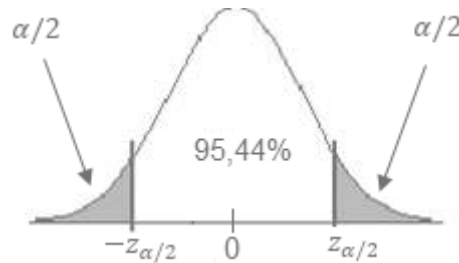
El área encerrada entre estos valores (nivel de confianza) es la probabilidad de estar dentro del intervalo de confianza.

Sin embargo, también hay un área que queda fuera de ese intervalo, llamado nivel de significación (α).

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 95,44%, por lo que el nivel de significación (α) será:

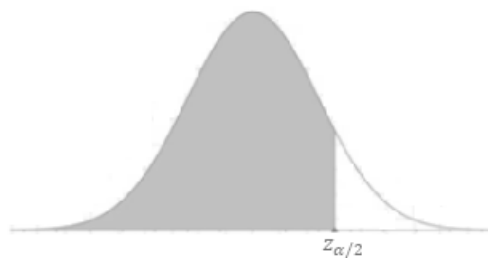
$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,9544 = 0,0456$$

Este área correspondiente al nivel de significación se reparte en dos partes iguales ($\alpha/2$), que es el área que queda a cada uno de los lados del nivel de confianza.



$$\alpha = 0,0456 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,0456}{2} = 0,0228$$

Ahora tengo que utilizar la tabla que me dan en el enunciado del examen para calcular el intervalo de confianza. Esta tabla sólo me da la posibilidad de obtener el área que queda a la izquierda de un cierto valor:



Esa área que queda a la izquierda será la unidad menos $\alpha/2$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0228 = 0,9772$$

Me voy a la tabla y busco dentro el 0,9772. A partir de ese valor, me muevo a la izquierda para encontrar el valor entero y el primer decimal de z , y hacia arriba para encontrar el segundo decimal:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

De esta forma hemos calculado el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = 2$$

El error máximo (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Despejando n :

$$\sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

$$n = \left(\frac{2 \cdot 0,5}{0,05} \right)^2 = 20^2 = 400$$

La muestra debe ser de más de 400 bolígrafos.

- b) Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

$$\mu = 2 \rightarrow X \sim N(\mu = 2, \sigma = 0,5)$$

Como queremos estudiar lo que se escribe de media con 16 bolígrafos, hay que considerar la distribución de la media de los 16 bolígrafos:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{X}_{16} \sim N\left(\mu = 2, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{16}}\right) \rightarrow \bar{X}_{16} \sim N\left(2, \frac{0,5}{4}\right)$$

$$\bar{X}_{16} \sim N\left(2, \frac{1}{8}\right) \rightarrow \bar{X}_{16} \sim N(2, 0,125)$$

Si con 16 bolígrafos queremos escribir más de 30 km, cada bolígrafo debe escribir más de $\frac{30}{16}$:

$$P\left(\bar{X}_{16} > \frac{30}{16}\right)$$

Como en este caso X sigue una distribución normal $N\left(\mu = 2, \sigma = \frac{1}{8}\right)$, es necesario tipificar, es decir, hacer un cambio de variable para poder usar la tabla de distribución normal $N(0,1)$. Se tipificará la variable Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P\left(Z > \frac{\frac{30}{16} - 2}{\frac{1}{8}}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{30}{16} - \frac{32}{16}}{\frac{1}{8}}\right) = P\left(Z > \frac{-\frac{2}{16}}{\frac{1}{8}}\right) = P\left(Z > -\frac{16}{16}\right) = P(Z > -1)$$

Como en la tabla los valores de Z son positivos:

$$P(Z > -1) = P(Z < 1)$$

Buscamos en la tabla el valor que se corresponde con $Z = 1$:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

$$P(Z < 1) = 0,8413$$

B.1. Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

En primer lugar calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 3+m-2 & 6+4 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 3+2 & 1-m-2 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$A^2 - 5A = -4I$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11-15 & 1+m-5 & 10-10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5-5 & -1-m+5 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ -m+4=0 \end{cases} \right\} \rightarrow m=4$$

Compruebo que se cumplan las demás condiciones para $m=4$:

$$m^2 - 5m = -4 \rightarrow 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \rightarrow 16 - 20 = -4 \text{ se cumple}$$

Por tanto, se cumple la identidad $A^2 - 5A = -4I$ para $m=4$.

b) Para $m=1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Para $m=1$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa de una matriz se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

Vamos a comprobarlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

B.2. La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .

Dibujamos las rectas que definen la región S del plano:

$$x = 3, \quad y = 0, \quad y = 15, \quad y = 5 - \frac{x}{2}, \quad y = x + 10, \quad y = 2x - 20$$

$$y = 5 - \frac{x}{2}$$

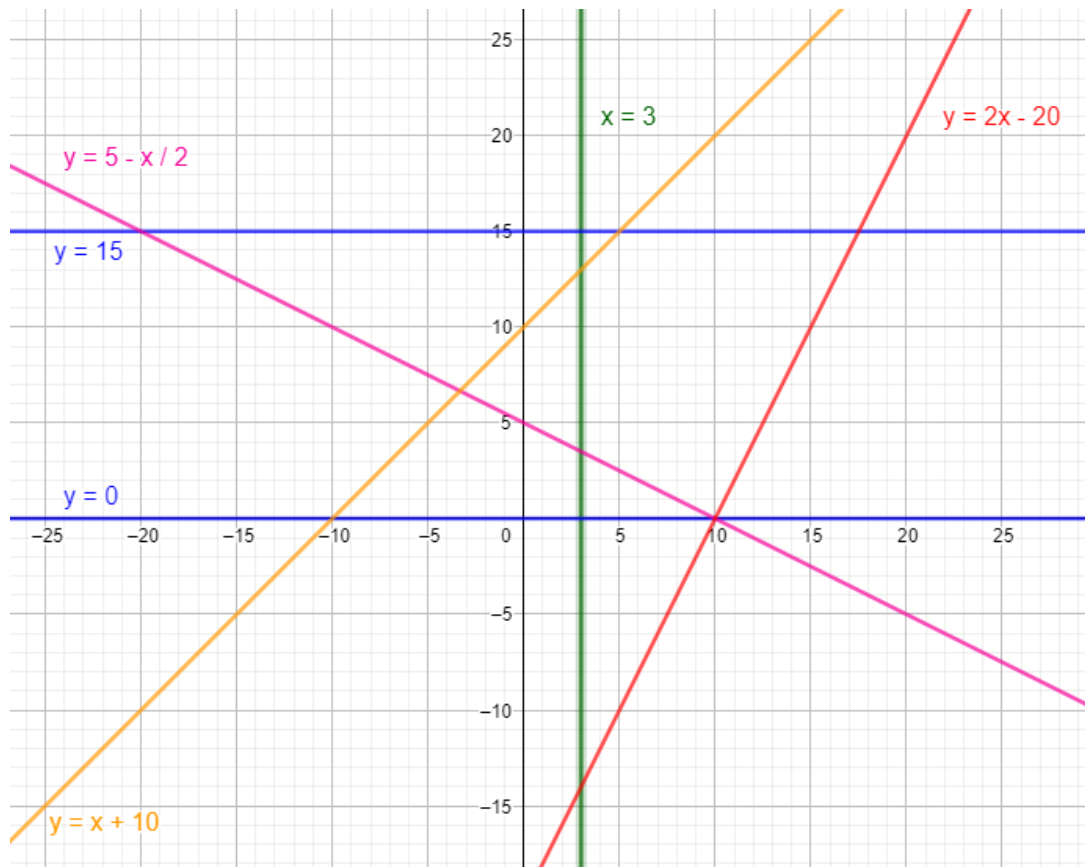
X	Y
0	5
10	0

$$y = x + 10$$

X	Y
0	10
-10	0

$$y = 2x - 20$$

X	Y
0	-20
10	0



Cogemos un punto y comprobamos que cumple las condiciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(0,0)$:

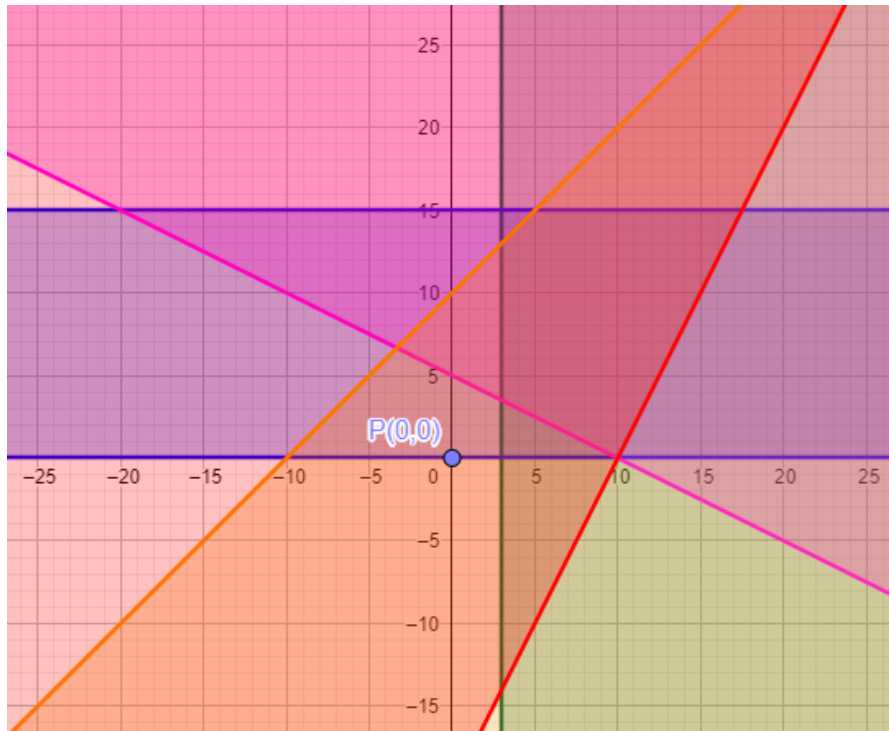
$x \geq 3 \rightarrow ¿0 \geq 3?$ No $\rightarrow$ Se cumple para un punto situado al lado contrario de la recta

$0 \leq y \leq 15 \rightarrow ¿0 \leq 0 \leq 15?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

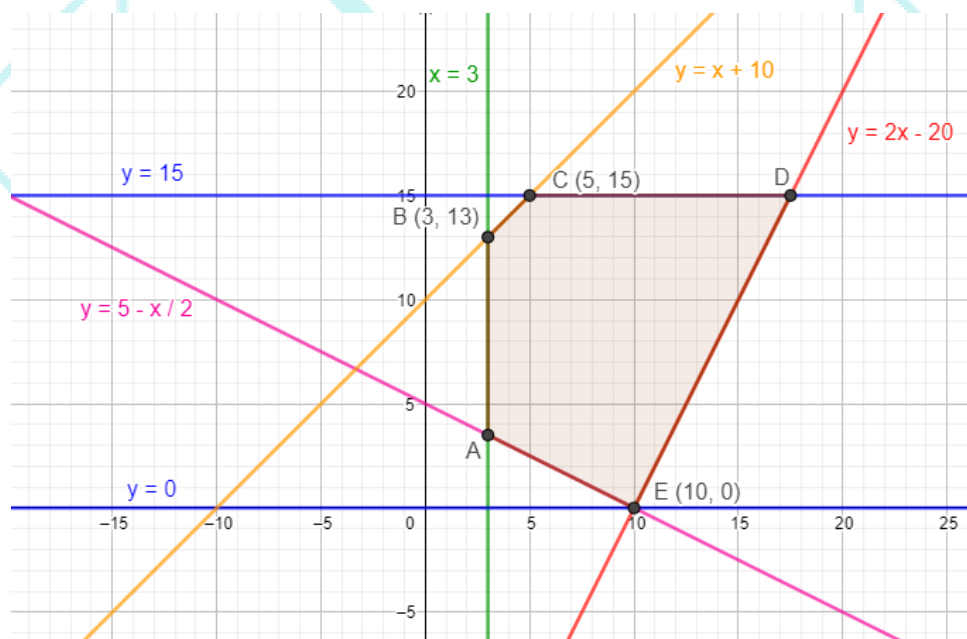
$y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \rightarrow ¿0 - 5 + \frac{0}{2} \geq 0?$ No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al lado contrario.

$y - x \leq 10 \rightarrow ¿0 - 0 \leq 10?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

$y + 20 \geq 2x \rightarrow ¿0 + 20 \geq 2 \cdot 0?$ Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Las coordenadas de sus vértices se pueden obtener gráficamente, excepto las de A y D que hay que calcularlas resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5 - \frac{x}{2} \end{array} \right\} \rightarrow y = 5 - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{10 - 3}{2} \rightarrow y = \frac{7}{2} \rightarrow A\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

$$B(3, 13)$$

$$C(5, 15)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 15 \\ y = 2x - 20 \end{array} \right\} \rightarrow 15 = 2x - 20 \rightarrow x = \frac{15 + 20}{2} \rightarrow x = \frac{35}{2} \rightarrow D\left(15, \frac{35}{2}\right)$$

$$E(10,0)$$

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Valoramos la función $f(x,y) = x + y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A \rightarrow f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \leftarrow \text{MÍNIMO}$$

$$B \rightarrow f(3, 13) = 3 + 13 = 16$$

$$C \rightarrow f(5, 15) = 5 + 15 = 20$$

$$D \rightarrow f\left(15, \frac{35}{2}\right) = 15 + \frac{35}{2} = \frac{30+35}{2} = \frac{65}{2} = 32,5 \leftarrow \text{MÁXIMO}$$

$$E \rightarrow f(10,0) = 10 + 0 = 10$$

El mínimo se alcanza en el punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$, con un valor de 6,5. El máximo se alcanza en el punto $D\left(15, \frac{35}{2}\right)$, con un valor de 32,5.

B.3. Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

El dominio de la función son todos los números reales, ya que es una función polinómica con un exponencial:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Para que la pendiente de la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal la pendiente debe ser cero. Por tanto, la derivada en $x = 1$ debe ser nula:

$$m(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} \left(3(x+k)e^{\frac{-x}{2}} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(3(x+k)e^{\frac{-x}{2}} \right) = 3 \frac{d}{dx} \left((x+k)e^{\frac{-x}{2}} \right)$$

Aplicamos la regla del producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

Teniendo en cuenta que en nuestro caso: $f = x + k$, $g = e^{\frac{-x}{2}}$

$$3 \frac{d}{dx} \left((x+k)e^{\frac{-x}{2}} \right) = 3 \left(\frac{d}{dx} (x+k) \cdot e^{\frac{-x}{2}} + \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{-x}{2}} \right) \cdot (x+k) \right)$$

Calculando cada derivada:

$$\frac{d}{dx}(x+k) = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{-x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$$

Y sustituyendo:

$$3\left(\frac{d}{dx}(x+k) \cdot e^{\frac{-x}{2}} + \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{-x}{2}}\right) \cdot (x+k)\right) = 3\left(1 \cdot e^{\frac{-x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\right) \cdot (x+k)\right)$$

Sacando factor común:

$$3e^{\frac{-x}{2}}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+k)\right) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}k\right) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{2-x-k}{2}\right)$$

Por tanto:

$$m(x) = f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{2-x-k}{2}\right)$$

Anulamos la pendiente para $x = 1$:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3e^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{2-1-k}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3}{e^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1-k}{2}\right) = 0 \rightarrow 3\left(\frac{1-k}{2}\right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3\left(\frac{1-k}{2}\right) = 0$$

$$3(1-k) = 0 \cdot 2 \rightarrow 3(1-k) = 0 \rightarrow 1-k = \frac{0}{3}$$

$$1-k = 0 \rightarrow k = 1$$

Ahora hay que calcular la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculando:

$$\text{Para } k = 1 \rightarrow f(x) = 3(x+1)e^{\frac{-x}{2}} \rightarrow f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{2-x-1}{2}\right) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$f(x_0) = f(1) = 3(1+1)e^{\frac{-1}{2}} = 3(2)e^{\frac{-1}{2}} = 6 \cdot e^{\frac{-1}{2}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{e}}$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 3e^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1-1}{2}\right) = 3e^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{6}{\sqrt{e}} = 0(x-1) \rightarrow y - \frac{6}{\sqrt{e}} = 0 \rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{e}}$$

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ahora analizamos el crecimiento de la función. Para ello, obtenemos las raíces de la primera derivada igualándola a cero:

$$\text{Para } k = 1 \rightarrow f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}} \left(\frac{1-x}{2} \right)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3e^{\frac{-x}{2}} \left(\frac{1-x}{2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1-x}{2} \right) = \frac{0}{3e^{\frac{-x}{2}}} \rightarrow \frac{1-x}{2} = 0 \rightarrow 1-x = 0 \cdot 2$$

$$1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:

$$\begin{array}{c} \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \hline \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad \hline \\ f'(0) = 3e^{\frac{0}{2}} \left(\frac{1-0}{2} \right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \quad f'(2) = 3e^{\frac{-2}{2}} \left(\frac{1-2}{2} \right) = 3e^{-1} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{-3}{2e} = -0,55 \\ 1,5 > 0 \rightarrow \text{creciente} \qquad \qquad \qquad -0,55 < 0 \rightarrow \text{decreciente} \\ \nearrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \searrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{Máx.} \end{array}$$

Por tanto, la función es creciente de $(-\infty, 1)$ y decreciente de $(1, \infty)$. En $x = 1$ presenta un máximo.

B.4. Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

Sean los sucesos:

M : Se estropea el microondas en el periodo de garantía.

H : Se estropea el horno en el periodo de garantía.

La probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos es:

$$P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H)$$

Como M y H son independientes:

$$P(M \cap H) = P(M) \cdot P(H) = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$$

Por tanto:

$$P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$$

- b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.**

Sean los sucesos:

M : Se estropea el microondas en el periodo de garantía.

F : Se conserva la factura de compra.

En el enunciado nos dicen que la probabilidad de que un cliente al que se le ha estropeado el microondas no conserve la factura es 0,4 (probabilidad condicionada):

$$P(\bar{F}|M) = 0,4$$

Teniendo en cuenta:

$$P(\bar{F}|M) = \frac{P(\bar{F} \cap M)}{P(M)} \quad P(\bar{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M)$$

Calculamos:

$$P(\bar{F}|M) = \frac{P(\bar{F} \cap M)}{P(M)} \rightarrow P(\bar{F} \cap M) = P(\bar{F}|M) \cdot P(M)$$

$$P(\bar{F} \cap M) = 0,4 \cdot 0,02 = 0,008$$

$$P(\bar{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) \rightarrow P(F \cap M) = P(M) - P(\bar{F} \cap M)$$

$$P(F \cap M) = 0,02 - 0,008 = 0,012$$

B.5. Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

- a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:**

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

Sea X la variable que representa el consumo de agua de un programa de lavado.

$$X \sim N(\mu, \sigma = 7)$$

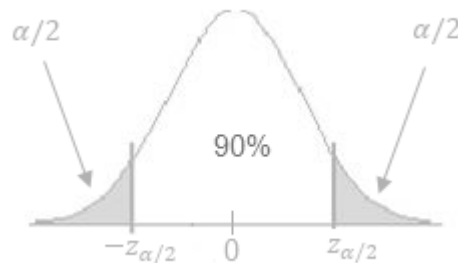
En primer lugar, hay que calcular el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con ese programa de lavado:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{40 + 45 + 38 + 44 + 41 + 40 + 35 + 50 + 40 + 37}{10} = 41$$

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 90%, por lo que el nivel de significación (α) será:

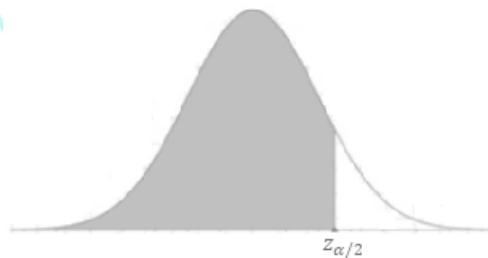
$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,90 = 0,1$$

Este área correspondiente al nivel de significación se reparte en dos partes iguales ($\alpha/2$), que es el área que queda a cada uno de los lados del nivel de confianza.



$$\alpha = 0,1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$$

Ahora tengo que utilizar la tabla que me dan en el enunciado del examen para calcular el intervalo de confianza. Esta tabla sólo me da la posibilidad de obtener el área que queda a la izquierda de un cierto valor:



Por tanto, esa área que queda a la izquierda será la unidad menos $\alpha/2$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95$$

Me voy a la tabla y busco dentro el 0,95. A partir de ese valor, me muevo a la izquierda para encontrar el valor entero y el primer decimal de z , y hacia arriba para encontrar el segundo decimal. En este caso, 0,95 se encuentra entre dos valores, por lo que hay que hacer la media:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Sustituyendo:

$$E = 1,645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3,64$$

El intervalo de confianza sería:

$$I_{\mu} = (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (41 - 3,64, 41 + 3,64) = (37,36, 44,64)$$

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

$$n = 64$$

Teniendo en cuenta que la longitud del intervalo de confianza es:

$$L = 2E$$

El error será:

$$E = \frac{L}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ litros}$$

Utilizando la fórmula del error tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2,5 \cdot \sqrt{64}}{7} = 2,86$$

Buscando en la tabla $Z = 2,86$:

<i>z</i>	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Por tanto, el nivel de significación será:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9979 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9979 = 0,0021 \rightarrow \alpha = 0,0042$$

Y, por tanto:

$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} \rightarrow \text{Nivel de confianza} = 1 - \alpha$$

$$\text{Nivel de confianza} = 1 - 0,0042 = 0,9958$$

El nivel de confianza será del 99,58%.