

Prueba de Evaluación de Bachillerato Para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura
Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1 h 30 m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B . La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A .

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x , ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$. (1 punto)

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$ (1 punto)

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio. (1 punto)

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio. (1 punto)

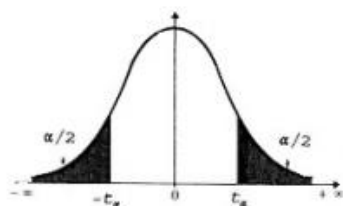
PROBLEMA 9 (2 puntos)

El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los libros de texto.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

LAS
CLASES
DE LAURA

SOLUCIONES JULIO 2020

PROBLEMA 1. Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : N° de días que abre la fábrica A

y : N° de días que abre la fábrica B

Teniendo en cuenta esto, la función objetivo es el coste:

$$C(x, y) = 30000x + 20000y$$

Y las restricciones son:

$$\begin{cases} 6x + 2y \geq 180 \rightarrow \text{Mínimo de 180 turismos entre A y B} \\ 2x + 2y \geq 140 \rightarrow \text{Mínimo de 140 furgonetas entre A y B} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \\ y \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \end{cases}$$

Simplificando las inecuaciones:

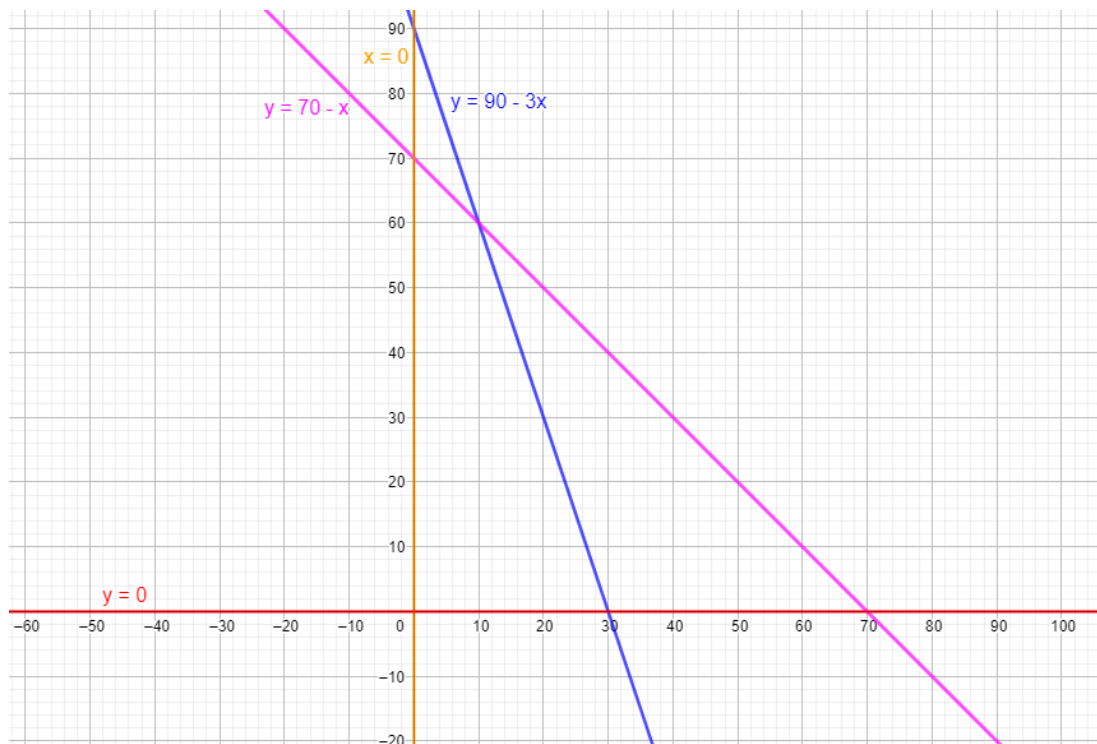
$$\begin{cases} 6x + 2y \geq 180 \\ 2x + 2y \geq 140 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{simplificando}} \begin{cases} 3x + y \geq 90 \\ x + y \geq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$$y = 90 - 3x, \quad y = 70 - x, \quad x = 0, \quad y = 0$$

x	y
0	90
30	0

x	y
0	70
70	0



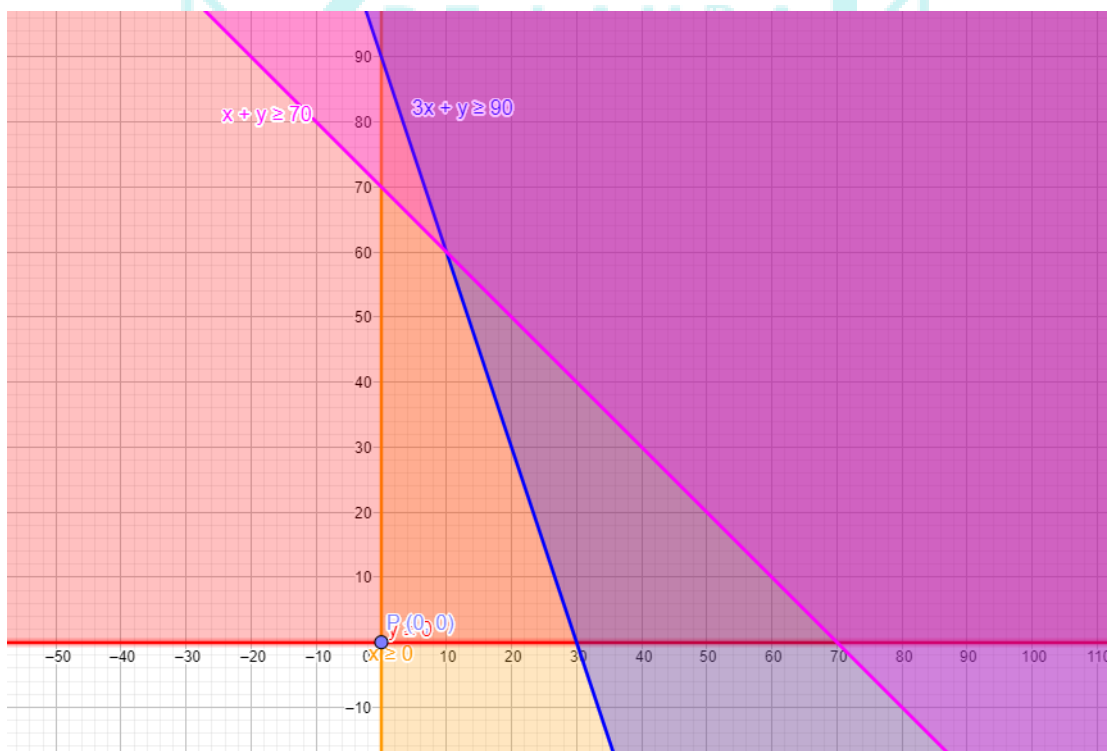
Cogemos un punto y comprobamos si cumple las condiciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(0,0)$:

$3x + y \geq 90 \rightarrow 0 \geq 90$? No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al otro lado de la recta.

$x + y \geq 70 \rightarrow 0 \geq 70$? No $\rightarrow$ Se cumple para punto situado al otro lado de la recta.

$x \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta (x positivos).

$y \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta (y positivos).



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Las coordenadas de algunos de sus vértices se pueden obtener, de forma exacta, gráficamente. Sin embargo, las que no se pueden obtener gráficamente se calculan resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$\begin{aligned}
 &A(0, 90) \\
 &\left. \begin{array}{l} y = 90 - 3x \\ y = 70 - x \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{restando}} 0 = 20 - 2x \rightarrow 2x = 20 \rightarrow x = 10 \\
 &\quad y = 70 - x \xrightarrow{x=10} y = 60 \rightarrow B(10, 60) \\
 &C(70, 0)
 \end{aligned}$$

Valoramos la función objetivo $C(x, y) = 30000x + 20000y$ en cada uno de los vértices de la región:

$$A \rightarrow C(0, 90) = 30000 \cdot 0 + 20000 \cdot 90 = 1.800.000$$

$$B \rightarrow C(10, 60) = 30000 \cdot 10 + 20000 \cdot 60 = 1.500.000 \leftarrow \text{MÍNIMO}$$

$$C \rightarrow C(70, 0) = 30000 \cdot 70 + 20000 \cdot 0 = 2.100.000$$

El coste mínimo se alcanza en el punto $B(10, 60)$, con un valor de 1.500.000 euros. Por tanto, debe abrir 10 días la fábrica A y 60 días la fábrica B para que el coste de producir el pedido de la temporada sea el mínimo.

PROBLEMA 2. Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes *A* y *B* que pone a la venta. Cada lote *A* contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote *B* 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Procedemos como en el ejercicio anterior. Primero, se definen las variables del problema:

x : N° de lotes del tipo *A*

y : N° de lotes del tipo *B*

Teniendo en cuenta esto, la función objetivo es el beneficio:

$$B(x, y) = 15x + 12y$$

Y las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 900 \rightarrow \text{Máximo 900 botes de miel entre los lotes A y B} \\ 2x + y \leq 500 \rightarrow \text{Máximo 500 botes de polen entre los lotes A y B} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \\ y \geq 0 \rightarrow \text{Las cantidades deben ser positivas} \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 900 \\ 2x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Rectas}} \begin{cases} y = \frac{900 - 2x}{3} \\ y = 500 - 2x \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$$y = \frac{900 - 2x}{3} \quad y = 500 - 2x \quad x = 0 \quad y = 0$$

x	y
0	300
450	0

x	y
0	500
250	0



Cogemos un punto y comprobamos si cumple las condiciones del ejercicio. Por ejemplo, si cogemos el punto $P(50, 50)$:

$2x + 3y \leq 900 \rightarrow 250 \leq 900$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

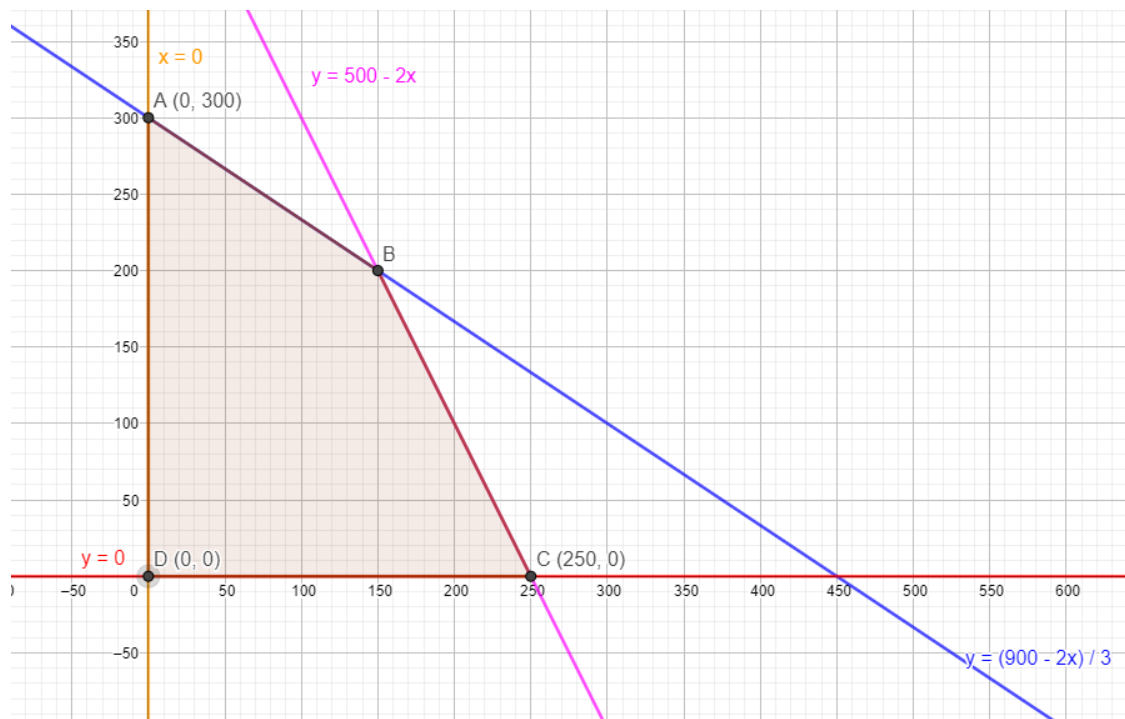
$2x + y \leq 500 \rightarrow 150 \leq 500$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta.

$x \geq 0 \rightarrow 50 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta (x positivos).

$y \geq 0 \rightarrow 50 \geq 0$? Sí $\rightarrow$ Se cumple para ese lado de la recta (y positivos).



Por tanto, la zona donde se cumplen todas las condiciones es la región sombreada de la gráfica:



Las coordenadas de algunos de sus vértices se pueden obtener, de forma exacta, gráficamente. Sin embargo, las que no se pueden obtener gráficamente se calculan resolviendo el sistema formado por las rectas correspondientes:

$$\begin{aligned}
 & A(0, 300) \\
 & \left. \begin{aligned} y &= \frac{900 - 2x}{3} \\ y &= 500 - 2x \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{igualando}} \frac{900 - 2x}{3} = 500 - 2x \rightarrow 900 - 2x = 1500 - 6x \rightarrow \begin{aligned} 4x &= 600 \\ x &= \frac{600}{4} = 150 \end{aligned} \\
 & \quad y = 500 - 2x \xrightarrow{x=150} y = 500 - 300 = 200 \rightarrow B(150, 200) \\
 & \quad C(250, 0) \quad D(0, 0)
 \end{aligned}$$

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 15x + 12y$ en cada uno de los vértices de la región:

$$A \rightarrow B(0, 300) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 300 = 3600$$

$$B \rightarrow B(150, 200) = 15 \cdot 150 + 12 \cdot 200 = 4650 \leftarrow \text{MAXIMO}$$

$$C \rightarrow B(250, 0) = 15 \cdot 250 + 12 \cdot 0 = 3750$$

$$D \rightarrow B(0, 0) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$$

El beneficio máximo se alcanza en el punto $B(150, 200)$. Por tanto, debe organizar 150 lotes del tipo A y 200 lotes del tipo B para que el beneficio sea máximo (de 4.650 euros).

PROBLEMA 3. Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

Lo primero que debemos hacer es resolver el sistema, de forma que obtengamos una expresión para la X y otra para la Y :

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases} \xrightarrow{\text{restando}} -7X = 3B \rightarrow X = \frac{3B}{-7}$$

$$-2X + Y = A + B \xrightarrow{X = \frac{3B}{-7}} -2 \cdot \left(\frac{3B}{-7}\right) + Y = A + B \rightarrow \frac{6B}{7} + Y = A + B$$

$$Y = A + B - \frac{6B}{7} \rightarrow Y = A + \frac{1}{7}B$$

Sustituyendo A y B en las expresiones de X e Y , y operando, obtenemos el valor de las incógnitas:

$$X = \frac{3B}{-7} \rightarrow X = -\frac{3}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y = A + \frac{1}{7}B \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{7} & 5 + \frac{1}{7} \\ 0 + 0 & -3 - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{36}{7} \\ 0 & -\frac{22}{7} \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4. Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A .

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

Como ya sabemos:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Si $A^t = A^{-1}$, entonces se debe cumplir:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t = I$$

Por tanto, si $A^t = A^{-1}$ se debe cumplir que:

$$A \cdot A^t = I \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos y obtenemos el valor de x :

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & -x + x \\ -x + x & 1 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{igualando}} x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

PROBLEMA 5. El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

Analizamos los extremos relativos. Para ello, obtenemos las raíces de la primera derivada igualándola a cero:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \rightarrow G'(x) = 6t^2 - 54t + 84$$

$$G'(x) = 0 \rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0 \rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{9+5}{2} = 7 \\ \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$$

Ambos puntos son extremos relativos y están en el intervalo solicitado (entre 0 y 8).

Valoramos la función en cada uno de ellos:

$$t = 0 \rightarrow G(0) = 2 \cdot 0^3 - 27 \cdot 0^2 + 84 \cdot 0 + 60 = 60$$

$$t = 2 \rightarrow G(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 + 60 = 136 \leftarrow \text{MÁXIMO}$$

$$t = 7 \rightarrow G(7) = 2 \cdot 7^3 - 27 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 + 60 = 11 \leftarrow \text{MÍNIMO}$$

$$t = 8 \rightarrow G(8) = 2 \cdot 8^3 - 27 \cdot 8^2 + 84 \cdot 8 + 60 = 28$$

Por tanto, la presenta en $t = 2$ un máximo relativo y en $t = 7$ tiene un mínimo relativo. Es decir, el gasto máximo tiene lugar a las 2 horas, y tiene un valor de 136 euros. El gasto mínimo se produce a las 7 horas y es de 11 euros.

PROBLEMA 6. En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x , ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta.

En primer lugar, analizamos las condiciones que nos dicen.

Primero nos indican que para un aumento de 4 grados se han recogido 12 kg de algas:

$$\begin{aligned} F(4) = 12 &\rightarrow F(4) = 4^2 - 3A \cdot 4 + 8B = 12 \rightarrow 16 - 12A + 8B = 12 \\ &-12A + 8B = -4 \end{aligned}$$

Además, nos dicen que la función es continua. La función cambia de definición en $x = 3$, por lo que para que sea continua debe cumplirse que:

$$F(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x)$$

$$F(3) = 2B \cdot 3 + 2A = 6B + 2A$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = 6B + 2A$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = 3^2 - 3A \cdot 3 + 8B = 9 - 9A + 8B$$

Como tienen que coincidir:

$$6B + 2A = 9 - 9A + 8B \rightarrow 11A - 2B = 9$$

Ya tenemos una ecuación con cada una de las condiciones. Formamos un sistema y lo resolvemos:

$$\begin{cases} -12A + 8B = -4 \\ 11A - 2B = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -12A + 8B = -4 \\ \cdot 4 \\ 44A - 8B = 36 \end{matrix} \xrightarrow{\text{sumando}} 32A = 32 \rightarrow A = 1$$

$$11A - 2B = 9 \xrightarrow{A=1} 11 - 2B = 9 \rightarrow 2B = 2 \rightarrow B = 1$$

Por tanto:

$$A = B = 1$$

PROBLEMA 7. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

Lo primero que hay que comprobar es si los puntos de corte de la función con el eje OX están dentro o fuera del intervalo a estudiar (entre 4 y 6). Para ello, calculamos los puntos de corte:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Ambos valores están fuera de la región de estudio, por lo que se calcula la integral definida entre 4 y 6:

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \int_4^6 x^2 + x - 2 \, dx = \int_4^6 x^2 \, dx + \int_4^6 x \, dx - \int_4^6 2 \, dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_4^6 = \left[\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6 \right] - \left[\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 \right] = \\ &= [72 + 18 - 12] - \left[\frac{64}{3} + 8 - 8 \right] = 78 - \frac{64}{3} = \frac{234 - 64}{3} = \frac{170}{3} = 56,7 \, u^2 \end{aligned}$$

- (b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2-1}{3(x^2+x-2)}$

Al ser una función racional, el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador:

$$3(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, estos puntos ($x = -2$ y $x = 1$) son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales.

En $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot (-2)^2 - 1}{3((-2)^2 - 2 - 2)} = \frac{-9}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot (-2)^2 - 1}{3((-2)^2 - 2 - 2)} = \frac{-9}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot (-2)^2 - 1}{3((-2)^2 - 2 - 2)} = \frac{-9}{0^-} = \infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \end{array}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot 1^2 - 1}{3(1^2 + 1 - 2)} = \frac{-3}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot 1^2 - 1}{3(1^2 + 1 - 2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-2 \cdot 1^2 - 1}{3(1^2 + 1 - 2)} = \frac{-3}{0^-} = \infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{array}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

- Asíntota horizontal: $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación dejamos en el numerador y en el denominador sólo el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

Hay asíntota horizontal en $y = \frac{-2}{3}$

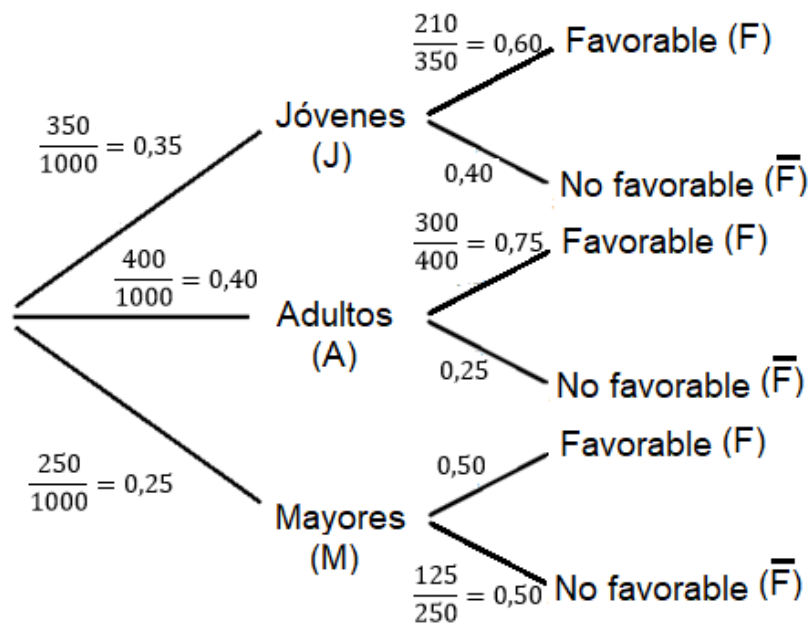
- Asíntota oblicua: $y = mx + n$

Como hay asíntota horizontal, no hay oblicua.

PROBLEMA 8. Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) **Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.**

En primer lugar, realizamos el diagrama de árbol:



Dentro de los adultos, la probabilidad de que sea contrario a la puesta en marcha del servicio es:

$$P(\text{Adulto no favorable}) = \frac{100}{400} = 0,25$$

- (b) **Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.**

La probabilidad de que un socio sea favorable a la puesta en marcha del servicio será:

$$\begin{aligned}
 P(F) = & \text{Probabilidad de que sea del joven y favorable} + \\
 & + \text{Probabilidad de que sea adulto y favorable} + \\
 & + \text{Probabilidad de que sea mayor y favorable}
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(J) \cdot P(F|J) + P(A) \cdot P(F|A) + P(M) \cdot P(F|M) = \\
 &= 0,35 \cdot 0,60 + 0,40 \cdot 0,75 + 0,25 \cdot 0,50 = 0,21 + 0,3 + 0,125 = 0,635
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 9. El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los libros de texto.

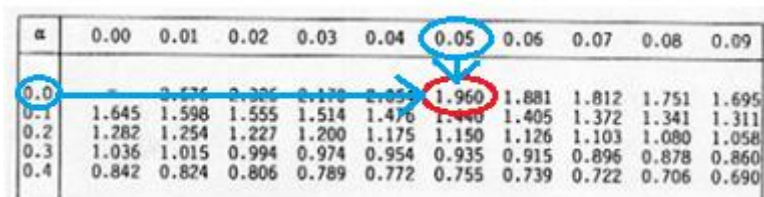
Sea X la variable que representa el peso de un libro de texto (en gramos):

$$X \sim N(\mu, \sigma = 72)$$

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 95%, por lo que el nivel de significación (α) será:

$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,95 = 0,05$$

Me voy a la tabla y busco el valor que corresponde a $\alpha = 0,05$:



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0						1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra (36 libros) y σ es la desviación típica (800 gr).

Sustituyendo:

$$E = 1,96 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}} = 1,96 \cdot \frac{72}{6} = 1,96 \cdot 12 = 23,52 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza sería:

$$I_{\mu} = (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (800 - 23.52, 800 + 23.52) = (776.48, 823.52)$$

PROBLEMA 10. Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Sea X la variable que representa la renta mensual de una familia (en euros):

$$X \sim N(\mu, \sigma = 400)$$

En este problema nos piden que el nivel de confianza sea del 95%, por lo que el nivel de significación (α) será:

$$\alpha = 1 - \text{Nivel confianza} = 1 - 0,95 = 0,05$$

Me voy a la tabla y busco el valor que corresponde a $\alpha = 0,05$:

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.2420	0.2578	0.2744	0.2910	0.3075	0.3241	0.3408	0.3574	0.3745
0.1	0.3907	0.4049	0.4191	0.4332	0.4473	0.4615	0.4756	0.4896	0.5037	0.5178
0.2	0.5319	0.5458	0.5596	0.5734	0.5871	0.6009	0.6145	0.6281	0.6417	0.6554
0.3	0.6691	0.6827	0.6962	0.7098	0.7234	0.7359	0.7485	0.7611	0.7736	0.7859
0.4	0.7983	0.8106	0.8228	0.8349	0.8469	0.8588	0.8706	0.8823	0.8939	0.9054

De esta forma calculamos el valor positivo del intervalo de confianza:

$$z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error del intervalo de confianza (E) es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde n es el tamaño de la muestra y σ es la desviación típica.

Como queremos que el intervalo tenga una longitud de 160 euros, el error debe ser la mitad:

$$E = \frac{160}{2} = 80$$

Sustituyendo:

$$80 = 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{400}{80} = 9,8 \rightarrow n = 9,8^2 = 96,04$$

Con este valor de $n = 96,04$ se obtiene un error de 80, por tanto, una longitud de intervalo de 160 euros. Esta longitud se debe alcanzar como mínimo, por lo que habría que aumentar el tamaño de la muestra, es decir, redondear al entero superior más cercano:

$$n = 97$$

El tamaño de la muestra debe ser de 97 familias mínimo.