

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2019-2020

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, sólo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función

$f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Estudia el rango de A según los valores de m . **(1.5 puntos)**
- b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020 A$. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

- a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . **(1.25 puntos)**
- b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{2 - \cos(x)}$.

- a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
- b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

- a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**
- b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . **(1.25 puntos)**
- b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A = (1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

- a) Calcular la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . **(1.25 puntos)**
- b) Calcular la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 1. Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1.25 puntos)

Al ser una función racional, el dominio son todos los números reales excepto los que anulan el denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Por tanto:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, estos puntos ($x = -1$ y $x = 1$) son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1 + 2 - 3}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Como este límite es finito, la función no tiene asíntota vertical en $x = -1$.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1 - 2 - 3}{0} = \frac{-4}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{-4}{0^-} = \infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ &\text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

- Asíntota horizontal: $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

Como este límite es finito, existe asíntota horizontal en $y = 1$.

- Asíntota oblicua: $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1.25 puntos)

Derivamos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x-3}{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x-3) \cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x+3}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Como se puede observar, $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x , excepto para los que no existe el dominio (-1 y 1).

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:



$$f'(-2) = \frac{2}{(-2-1)^2} = \frac{2}{(-3)^2} = \frac{2}{9}; f'(0) = \frac{2}{(0-1)^2} = \frac{2}{(-1)^2} = 2; f'(2) = \frac{2}{(2-1)^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

$$\frac{2}{9} > 0 \rightarrow \text{creciente} \quad 2 > 0 \rightarrow \text{creciente} \quad 2 > 0 \rightarrow \text{creciente}$$

Por tanto, la función es creciente de $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y de $(1, \infty)$, es decir, es creciente en todo su dominio

EJERCICIO 2. Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

En este caso la función es continua en todo $\mathbb{R}$. El área determinada por el eje de abscisas y la recta $x = a$ se calcula mediante una integral definida, cuyo valor es $\frac{1}{9}$:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{9}$$

Calculamos la integral indefinida mediante integración por partes:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int f(x) dx = \int x e^{3x} dx$$

Definimos:

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{3x} dx \rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$$

Por tanto:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int x e^{3x} dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} dx =$$

$$= \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C =$$

$$= \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C = \frac{3x e^{3x} - e^{3x}}{9} + C = \frac{e^{3x}(3x - 1)}{9} + C$$

Aplicando la regla de Barrow para definir la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \left[\frac{e^{3x}(3x - 1)}{9} \right]_0^a = \frac{e^{3a}(3a - 1)}{9} - \frac{e^{3 \cdot 0}(3 \cdot 0 - 1)}{9} = \\ &= \frac{e^{3a}(3a - 1)}{9} - \frac{1(0 - 1)}{9} = \frac{e^{3a}(3a - 1)}{9} - \frac{-1}{9} = \frac{e^{3a}(3a - 1) + 1}{9} \end{aligned}$$

Igualando a $\frac{1}{9}$:

$$\frac{e^{3a}(3a - 1) + 1}{9} = \frac{1}{9} \rightarrow e^{3a}(3a - 1) + 1 = 1$$

$$e^{3a}(3a - 1) = 0 \rightarrow 3a - 1 = 0 \rightarrow 3a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 3. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)

Hay que calcular el determinante de la matriz e igualarlo a cero para averiguar los valores que debe tomar el parámetro m .

Se puede comprobar que la matriz tiene, al menos, rango dos, ya que el determinante de orden dos no se anula:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 2$$

Calculando el determinante de orden tres e igualándolo a cero:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = (5 - m \cdot (m+1)) - (m \cdot (m+2)) = \\ &= (5 - m^2 - m) - (m^2 + 2m) = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = -2m^2 - 3m + 5 \\ |A| &= 0 \rightarrow -2m^2 - 3m + 5 = 0 \end{aligned}$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{-4} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{3+7}{-4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \\ \frac{3-7}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}$$

Para que la matriz A tenga rango 3 su determinante debe ser no nulo. Por tanto:

$$rg(A) = \begin{cases} 2 & \text{para } m = -\frac{5}{2} \text{ o } m = 1 \\ 3 & \text{para cualquier otro valor de } m \end{cases}$$

b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020 A$. (1 punto)

La inversa de $2020 A$ es:

$$(2020 A)^{-1} = 2020^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot A^{-1}$$

Para $m = 2$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La inversa de una matriz se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

Vamos a comprobarlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (5 - 6) - 8 = -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{-9} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{6}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$(2020 A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$(2020 A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18180} & -\frac{5}{18180} & \frac{7}{18180} \\ -\frac{6060}{2} & \frac{6060}{2} & \frac{6060}{2} \\ \frac{18180}{2} & \frac{18180}{2} & -\frac{18180}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3636} & -\frac{1}{3636} & \frac{7}{18180} \\ -3030 & 3030 & 3030 \\ 9090 & 9090 & -9090 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . (1.25 puntos)

Sacamos el vector director y un punto de cada recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{a} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, a)$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \vec{u}_s = (-a, -1, 2)$$

El vector que determinan esos puntos son:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (3, 3, -1) - (1, 2, 1) = (2, 1, -2)$$

Como se puede observar, las rectas no son paralelas (ya que no tienen el mismo vector director ni uno es múltiplo del otro).

Si el $rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3$ las rectas se cruzan. De lo contrario, las rectas se cortan.

Para saber el rango debemos calcular el determinante de esa matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 4 - a^2) - (-2a + 2a + 2) = 4 - a^2$$

Igualando a cero:

$$4 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2$$

Este conjunto $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s})$ tiene, al menos, rango 2 ya que los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ son linealmente independientes.

Para $a = 2$ o $a = -2$ el determinante es igual a cero, por lo que en estos casos el rango es 2 (las rectas se cortan). Para cualquier otro valor de a el rango es 3 (las rectas se cruzan):

Si $a = 2$ o $a = -2 \rightarrow rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 2 \rightarrow$ las rectas r y s se cortan en un punto

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \rightarrow rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3 \rightarrow$ las rectas r y s se cruzan en el espacio

b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. (1.25 puntos)

Para $a = 2$:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Expresamos las rectas en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Los vectores directores son $\vec{u}_r = (1,1,2)$ y $\vec{u}_s = (-2,-1,2)$.

Puesto que existe un único punto en común entre r y s , igualamos ambas rectas, obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2t & \rightarrow \lambda = 3 - 2t - 1 = 2 - 2t \\ 2 + \lambda = 3 - t \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2t \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2 + (2 - 2t) = 3 - t \rightarrow 4 - 2t = 3 - t \rightarrow 1 = t$$

Sustituyendo en λ :

$$\lambda = 2 - 2t = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

Por tanto, el punto de intersección entre las rectas r y s es:

$$I = \begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 + 0 = 1 \\ y = 2 + \lambda = 2 + 0 = 2 \\ z = 1 + 2\lambda = 1 + 0 = 1 \end{cases} \rightarrow I(1,2,1)$$

Cualquier recta perpendicular a las rectas r y s debe tener un vector director que sea perpendicular a los vectores directores de ambas. Este se calcula mediante el producto vectorial de los vectores directores de r y s :

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}) - (-2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = \\ &= (4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}) \rightarrow \vec{u} = (4, -6, 1) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la recta perpendicular a ambas y que pasa por su punto de corte es aquella que pasa por el punto de intersección $I(1,2,1)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (4, -6, 1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

EJERCICIO 5. Sea $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{2 - \cos(x)}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). (2 puntos)

Para estudiar el crecimiento de la función y obtener así los extremos hay que obtener las raíces de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (2 - \cos(x)) - \sin(x) \cdot \sin(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}{(2 - \cos(x))^2} =$$

$$= \frac{2\cos(x) - (\cos^2(x) + \sin^2(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2} = 0 \rightarrow 2\cos(x) - 1 = 0 \cdot (2 - \cos(x))^2$$

$$2\cos(x) - 1 = 0 \rightarrow 2\cos(x) = 1 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Como el $\cos(x)$ es positivo, tendremos solución en el I y IV cuadrantes.

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \rightarrow \text{I cuadrante}$$

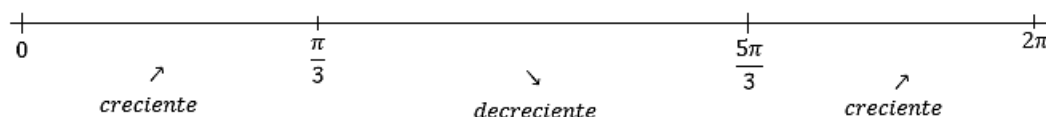
$$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \text{IV cuadrante}$$

Representamos los puntos críticos de la función y los extremos de su dominio de definición. Tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:

$$f'(30) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\cos(30) - 1}{(2 - \cos(30))^2} = \frac{0,73}{1,29} = 0,57 \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$f'(180) = f'(\pi) = \frac{2\cos(180) - 1}{(2 - \cos(180))^2} = \frac{-3}{9} = -0,33 \rightarrow f'(\pi) < 0$$

$$f'(330) = f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{2\cos(330) - 1}{(2 - \cos(330))^2} = \frac{0,73}{1,29} = 0,57 \rightarrow f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) > 0$$



Máx. relativo en $x = \frac{\pi}{3}$

Min. relativo en $x = \frac{5\pi}{3}$

Por tanto, la función es creciente en los intervalos $(0, \frac{\pi}{3})$ y $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$, y decreciente en el intervalo $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$. Así pues, presenta un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{3}$.

Para determinar los extremos absolutos hay que evaluar la función tanto en los puntos críticos como en los extremos de su dominio de definición ($x = 0$ y $x = 2\pi$), ya que estos puntos también son extremos relativos de la función:

$$f(0) = \frac{\sin(0)}{2 - \cos(0)} = \frac{0}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f(60) = \frac{\text{sen}(60)}{2 - \cos(60)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58 \rightarrow \text{Máx. absoluto}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = f(300) = \frac{\text{sen}(300)}{2 - \cos(300)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0,58 \rightarrow \text{Mín. absoluto}$$

$$f(2\pi) = f(360) = \frac{\text{sen}(360)}{2 - \cos(360)} = \frac{0}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

La función alcanza su máximo absoluto en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y su mínimo absoluto en $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. (0.5 puntos)

Como ya hemos calculado, en el punto $x = \frac{\pi}{3}$ hay un máximo absoluto y su primera derivada es cero.

La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función:

$$m(x) = f'(x) = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$$

Para $x_0 = \frac{\pi}{3}$:

$$f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'(60) = \frac{2\cos(60) - 1}{(2 - \cos(60))^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \cdot \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \rightarrow \frac{3y - \sqrt{3}}{3} = 0$$

$$3y - \sqrt{3} = 0 \rightarrow 3y = \sqrt{3} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta normal es una recta perpendicular a la anterior y que pasa por el punto calculado. Como la recta tangente $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ es paralela al eje de abscisas, la recta

perpendicular debe ser paralela al eje de ordenadas. Teniendo en cuenta que debe pasar por el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, esta recta normal será precisamente $x = \frac{\pi}{3}$.

EJERCICIO 6. Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. (2 puntos)

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2} dx = \int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4} dx$$

Como numerador y denominador son del mismo grado, realizamos la división:

$$\begin{array}{r} 3x^2 \qquad \qquad + 4 \quad \bigg| x^2 - 4x + 4 \\ -3x^2 + 12x - 12 \quad \bigg| \quad \quad \quad \\ \hline 12x - 8 \end{array}$$

$$\text{Dividendo}(D) = \text{divisor}(d) \cdot \text{Cociente}(C) + \text{Resto}(R)$$

$$3x^2 + 4 = (x^2 - 4x + 4) \cdot 3 + (12x - 8)$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4} dx &= \int \frac{(x^2-4x+4) \cdot 3 + (12x-8)}{x^2-4x+4} dx = \\ &= \int \frac{(x^2-4x+4) \cdot 3}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{12x-8}{x^2-4x+4} dx = \int 3dx + \int \frac{12x-8}{x^2-4x+4} dx \end{aligned}$$

Expresamos el segundo término como suma de fracciones simples:

$$\frac{12x-8}{x^2-4x+4} = \frac{12x-8}{(x-2)^2}$$

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A \cdot (x-2) + B}{(x-2)^2} = \frac{Ax - 2A + B}{(x-2)^2} = \frac{Ax + (B - 2A)}{(x-2)^2}$$

$$Ax = 12x \rightarrow A = 12$$

$$B - 2A = -8 \rightarrow B - 2 \cdot 12 = -8 \rightarrow B = 24 - 8 \rightarrow B = 16$$

Así:

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$$

Por tanto, la integral puede expresarse como:

$$\int 3dx + \int \frac{12x-8}{(x-2)^2} dx = \int 3dx + \int \frac{12}{x-2} dx + \int \frac{16}{(x-2)^2} dx =$$

$$= 3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$$

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. (0.5 puntos)

Todas las primitivas de la función son de la forma:

$$F(x) = 3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$$

Como debe pasar por el punto $(3,5)$, calculamos el valor de la constante C para que $F(3) = 5$:

$$F(3) = 3 \cdot 3 + 12 \ln|3-2| - \frac{16}{3-2} + C$$

$$F(3) = 9 + 0 - 16 + C \rightarrow F(3) = -7 + C$$

$$F(3) = 5 \rightarrow -7 + C = 5 \rightarrow C = 12$$

Por tanto, la primitiva de f que pasa por el $(3,5)$ es:

$$F(x) = 3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 12$$

EJERCICIO 7. Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . (1.25 puntos)

Expresamos en forma de sistema:

$$AX = B \rightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = 2a \\ 4x + y + 4z = 3a \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + z = 2a \\ 4x + y + 4z = 3a \end{array} \right\} \rightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes averiguamos el rango de la matriz A para cualquier valor de a (ya que es independiente de a):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4+1) - (1+4) = 0$$

$$\text{Como } |A| = 0 \rightarrow \text{rg}(A) \leq 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$ para cualquier valor de a

Ahora calculamos el determinante de la matriz ampliada e igualamos a cero para obtener los valores de a para los cuales el determinante se anula:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix} = (8a + a) - (2a + 3a)$$

$$|A^*| = 0 \rightarrow (8a + a) - (2a + 3a) = 0$$

$$8a + a - 2a - 3a = 0 \rightarrow 4a = 0 \rightarrow a = 0$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1: $a \neq 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & 1 & | & 2a \\ 4 & 1 & 4 & | & 3a \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow \text{Sistema Incompatible (SI)} \\ \text{No tiene solución}$$

- Caso 2: $a = 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 2$$

$$|A^*| = 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. (1.25 puntos)

Si $a = 0$:

$$(A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } F_2 = F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, de infinitas soluciones, es necesario fijar parámetros:

$$N^{\circ} \text{ parámetros} = N^{\circ} \text{ incógnitas} - N^{\circ} \text{ ecuaciones no nulas} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, hay que fijar un parámetro:

$$z = \lambda$$

Resolviendo el sistema en función de este parámetro:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0 \xrightarrow{y=0, z=\lambda} \begin{cases} x + 0 + \lambda = 0 \\ x = -\lambda \end{cases}$$

Así, las infinitas soluciones vienen dadas por:

$$x = -\lambda$$

$$y = 0$$

$$z = \lambda$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solución en la que:

$$y + z = 4 \rightarrow 0 + \lambda = 4 \rightarrow \lambda = 4$$

es:

$$x = -4$$

$$y = 0$$

$$z = 4$$

EJERCICIO 8. Se considera el punto $A = (1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcular la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . (1.25 puntos)

El plano π debe ser perpendicular a la recta r ($\pi \perp r$), por tanto, un vector normal al plano ($\vec{n}_{\pi}$) será:

$$\vec{n} = \vec{u}_r$$

Escribiendo la ecuación de la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z = -2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3\lambda = -2 \end{cases} \rightarrow y = -2 + 3\lambda \rightarrow x = -y = 2 - 3\lambda$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r(2, -2, 0) \\ \vec{u}_r = (-3, 3, 1) \end{matrix}$$

Por tanto, el plano π :

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1, -2, 0) \\ \vec{n} = \vec{u}_r = (-3, 3, 1) \end{cases}$$

Así, la ecuación del plano será:

$$-3x + 3y + z + D = 0$$

Considerando el punto $A(1, -2, 0)$ por el que pasa:

$$-3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 + D = 0 \rightarrow D = 9$$

Por tanto, la ecuación del plano será:

$$\pi: -3x + 3y + z + 9 = 0$$

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . (1.25 puntos)

Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto. Así, el plano π' estará formado por el vector director de r ($\vec{u}_r$), el vector que une el punto A con un punto de la recta r ($\vec{AP}_r$) y el punto A :

$$\vec{AP}_r = P_r - A = (2, -2, 0) - (1, -2, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{u}_r = (-3, 3, 1)$$

$$A(1, -2, 0)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi': \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \\ u_{\vec{AP}_r x} & u_{\vec{AP}_r y} & u_{\vec{AP}_r z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(y + 2) - 3z = y - 3z + 2$$

$$\pi': y - 3z + 2 = 0$$