

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:

El alumno elegirá solo TRES problemas de entre los seis propuestos.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre tres y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$
, siendo a un parámetro real, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El estudio del sistema en función del parámetro a . (5 puntos)
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 puntos)
- c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 puntos)

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r . (3 puntos)
- b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
- c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$. (4 puntos)

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
- b) La integral $\int f(x) dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 0)$. (3+1 puntos)
- c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. (3 puntos)

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)
- b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)
- c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1), B(2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π . (4 puntos)
- b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A . Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r . (1+2 puntos)
- c) La distancia entre el punto B y la recta r . (3 puntos)

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x), 0 \leq x \leq 20$. (4 puntos)
- c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

LAS
CLASES
DE LAURA

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$, siendo a un

parámetro real, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a . (5 puntos)

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro a .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases} \rightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro a para que se anule el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a + a + a) - (a^3 + 1 + 1) = 3a - a^3 - 2 = -a^3 + 3a - 2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 0 & 3 & -2 \\ & & & 1 & & -1 & -1 & 2 \\ & & & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\hookrightarrow a = 1 \text{ es raíz}$$

$$-a^3 + 3a - 2 = (x - 1)(-x^2 - x + 2)$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \\ \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

Las raíces son: $a = 1$ (doble), $a = -2$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1: $a \neq 1, a \neq -2$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2: $a = 1$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$rg(A) = 1 \text{ (ya que las tres filas son iguales)}$$

$$rg(A^*) = 2 \text{ (ya que tiene dos filas iguales)}$$

Como:

$$rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow \text{Sistema Incompatible (SI)} \\ \text{No tiene solución}$$

- Caso 3: $a = -2$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 2 - 2) - (-8 + 1 + 1) = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

Cogemos un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4 + 1 - 2) - (4 + 1 - 2) = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Cogemos un determinante de orden menor:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

(3 puntos)

Si $a = -2$:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

La segunda y tercera fila son iguales, por lo que nos quedamos sólo con una de las dos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, de infinitas soluciones, es necesario fijar parámetros:

$$N^{\circ} \text{ parámetros} = N^{\circ} \text{ incógnitas} - N^{\circ} \text{ ecuaciones no nulas} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, hay que fijar un parámetro:

$$z = \lambda$$

Resolviendo el sistema en función de este parámetro:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow y = z \rightarrow y = \lambda$$

$$x + y - 2z = 1 \rightarrow x = -y + 2z + 1 \rightarrow x = -\lambda + 2\lambda + 1 \rightarrow x = \lambda + 1$$

Así, las soluciones son:

$$x = 1 + \lambda$$

$$y = \lambda$$

$$z = \lambda$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) La solución del sistema cuando $a = 0$.

(2 puntos)

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

Este sistema tiene una única solución. Vamos a resolver el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Quedando así:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ 2z = -2 \end{array} \right\} \rightarrow z = -1 \xrightarrow{z=-1} y = z \rightarrow y = -1 \xrightarrow{y=-1, z=-1} x = 1 - y \rightarrow x = 1 - (-1) = 2$$

Por tanto, la solución al sistema es:

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = -1$$

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r . (3 puntos)

La recta que pasa por los puntos P y Q tienen como vector director:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, \alpha) - (1, 0, 0) = (1, 1, \alpha)$$

El vector director de la recta r es:

$$\vec{u}_r = (1, 1, -1)$$

Para que dos rectas sean paralelas, sus vectores directores deben ser iguales o proporcionales. Como:

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, \alpha) \quad y \quad \vec{u}_r = (1, 1, -1)$$

El valor de α es:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha} \rightarrow \alpha = -1$$

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$.

(3 puntos)

Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto. Así, como el plano π contiene a P y a Q , estará formado por el vector director $\overrightarrow{PQ}$. Además, al ser paralelo a r , también estará formado por el vector director $\vec{u}_r$. Como punto, se puede coger tanto P como Q (porque el plano contiene ambos puntos):

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, \alpha) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{u}_r = (1, 1, -1)$$

$$P(1, 0, 0)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \\ u_{PQx} & u_{PQy} & u_{PQz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$[(x - 1) - y + z] - [z - (x - 1) + y] =$$

$$[x - 1 - y + z] - [z - x + 1 + y] =$$

$$x - y + z - 1 + x - y - z - 1$$

$$\pi: 2x - 2y - 2 = 0 \rightarrow \pi: x - y - 1 = 0$$

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$. (4 puntos)

El plano π' debe ser perpendicular a la recta r ($\pi' \perp r$), por tanto, un vector normal al plano ($\vec{n}$) será:

$$\vec{n} = \vec{u}_r = (1, 1, -1)$$

Así, la ecuación del plano será:

$$x + y - z + D = 0$$

Considerando el punto $P(1, 1, 1)$ por el que pasa:

$$1 + 1 - 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

Por tanto, la ecuación del plano será:

$$\pi': x + y - z - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$\left. \begin{array}{l} P = (x_0, y_0, z_0) \\ \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \end{array} \right\} \rightarrow d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (2, 1, 1) \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow d(P, \pi') = \left| \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right|$$

$$d(P, \pi') = \left| \frac{2 + 1 - 1 - 1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} u = 0,58 u$$

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f . (3 puntos)

Al ser una función racional, el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador:

$$x^2(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

A continuación, calculamos las asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, estos puntos ($x = 0$ y $x = 1$) son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales.

En $x = 0$ hemos visto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{array}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{2}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{2}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{array}$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntota horizontal: $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación dejamos en el numerador y en el denominador sólo el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntota oblicua: $y = mx + n$. Como tiene asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

- b) La integral $\int f(x) dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 puntos)

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx$$

Expresamos como suma de fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2(A+C) + x(B-A) - B}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

Eliminando denominador común:

$$x^2 + 1 = x^2(A+C) + x(B-A) - B$$

Comparando:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= x^2(A+C) \rightarrow A+C=1 \\ 0 &= x(B-A) \rightarrow B-A=0 \\ 1 &= -B \rightarrow B=-1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A+C &= 1 \\ B-A &= 0 \\ B &= -1 \end{aligned} \rightarrow B=A \xrightarrow{B=-1} A=-1$$

$$A+C=1 \rightarrow C=1-A \xrightarrow{A=-1} C=1-(-1)=2$$

Así:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

Por tanto, la integral puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx &= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = -\ln|x| - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right) + 2 \ln|x-1| + C = \\ &= -\ln|x| - \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) + 2 \ln|x-1| + C = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Todas las primitivas de la función son de la forma:

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + C$$

Como debe pasar por el punto (2, 0), calculamos el valor de la constante C para que $F(2) = 0$:

$$F(2) = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 2 \ln|2-1| + C$$

$$F(2) = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|1| + C \rightarrow F(2) = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 0 + C$$

$$F(2) = 0 \rightarrow -\ln|2| + \frac{1}{2} + C = 0 \rightarrow C = \ln|2| - \frac{1}{2}$$

Por tanto, la primitiva de f que pasa por el $(2, 0)$ es:

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + \ln|2| - \frac{1}{2}$$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. (3 puntos)

En primer lugar calculamos si la función corta al eje de abscisas: $y = 0$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} \rightarrow \nexists$$

Por tanto, la función no corta al eje de abscisas. Así, el área pedida es la integral definida entre 2 y 4:

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \int_2^4 \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx = \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| \right]_2^4 = \\ &= \left[-\ln|4| + \frac{1}{4} + 2\ln|4-1| \right] - \left[-\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|2-1| \right] = \\ &= \left[-\ln|4| + \frac{1}{4} + 2\ln|3| \right] - \left[-\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|1| \right] = -\ln|4| + \frac{1}{4} + 2\ln|3| + \ln|2| - \frac{1}{2} - 0 = \\ &= -\ln|4| + 2\ln|3| + \ln|2| - \frac{1}{4} = 1,25 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

(3 puntos)

En primer lugar, calculamos ambas matrices:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b+0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Por tanto:

$$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = (-4b^2) - (-12b^2 + 8b^2) = -4b^2 + 12b^2 - 8b^2 = 0$$

El determinante de la matriz AB es nulo, independientemente del valor que tome b . Por tanto, la matriz AB no tiene inversa.

$$|BA| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2$$

$$|BA| = 0 \rightarrow 12 - 2b^2 = 0 \rightarrow 2b^2 = 12 \rightarrow b^2 = 6 \rightarrow b = \pm\sqrt{6}$$

Cuando $b = \pm\sqrt{6}$ el determinante es cero. Así, para cualquier valor de $b \neq \pm\sqrt{6}$ la matriz BA tiene inversa.

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)

Trasponer una matriz consiste en cambiar las filas por las columnas. Así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^T A$ será:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2+1 & 2+0-2 \\ 2+0-2 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A^T A| = \begin{vmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 8b^2 - 0$$

$$|A^T A| = 0 \rightarrow 16 + 8b^2 = 0 \rightarrow 8b^2 = -16 \rightarrow b^2 = -2 \rightarrow b = \pm\sqrt{-2} \rightarrow \nexists$$

El determinante de $A^T A$ nunca se anula, independientemente del valor que tome b . Por tanto, la matriz $A^T A$ tiene inversa siempre.

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Como hemos visto, la inversa de $A^T A$ existe para cualquier valor de b . Por tanto, lo calculamos para cualquier valor de este parámetro.

La inversa de la matriz $A^T A$ se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{Adj(A^T A)^T}{|A^T A|}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow (A^T A)^T = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^T A) = \begin{pmatrix} +8 & -0 \\ -0 & +2+b^2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$\text{Adj}((A^T A)^T) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix}}{16+8b^2} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix}}{8(2+b^2)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{8(2+b^2)} & \frac{0}{8(2+b^2)} \\ \frac{0}{8(2+b^2)} & \frac{2+b^2}{8(2+b^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1), B(2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π . (4 puntos)

Se busca el plano π' .

Como sabemos, el vector normal a un plano es un vector perpendicular al mismo. Por tanto, un vector director del plano π' será el vector normal de π :

$$\text{Como } \pi' \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi'_1}} = \overrightarrow{n_\pi} = (2, 1, -1)$$

Teniendo en cuenta que el plano π' contiene tanto al punto A como al punto B , el vector $\overrightarrow{AB}$ será otro vector director de π' :

$$\text{Como } A \text{ y } B \in \pi' \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi'_2}} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$$

Eligiendo uno de los puntos, por ejemplo $A(1, 2, -1)$, como punto del plano, tenemos:

$$\pi': \begin{cases} \overrightarrow{u_{\pi'_1}} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_{\pi'_2}} = (1, -1, 1) \\ A(1, 2, -1) \end{cases}$$

Así, la ecuación del plano π' será:

$$\pi': \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[(x-1) - (y-2) - 2(z+1)] - [(z+1) + 2(y-2) + (x-1)] = 0$$

$$(x-1-y+2-2z-2) - (z+1+2y-4+x-1) = 0$$

$$-3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow y + z - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación del plano π' es:

$$\pi': y + z - 1 = 0$$

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r . (1+2 puntos)

Nos piden la ecuación de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A:

Considerando el punto $P(1, 1, 1)$ por el que pasa:

$$1 + 1 - 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

Por tanto, la ecuación del plano será:

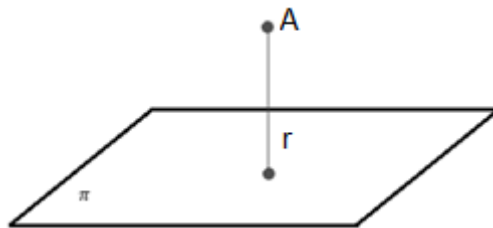
$$\pi': x + y - z - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$\left. \begin{array}{l} P = (x_0, y_0, z_0) \\ \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \end{array} \right\} \rightarrow d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (2, 1, 1) \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow d(P, \pi') = \left| \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right|$$

$$d(P, \pi') = \left| \frac{2 + 1 - 1 - 1}{\sqrt{1 + 1 + 1}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} u = 0,58 u$$



Para ello, necesitamos un punto (el punto A) y un vector director (el vector normal del plano):

$$r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r = \vec{n} = (2, 1, -1)$$

Ahora podemos calcular la ecuación de la recta r :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1, 2, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Escribiendo la ecuación de la recta r en forma continua:

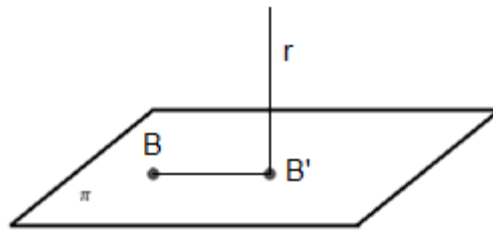
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Existen muchos pares de planos que se cortan en esa recta. Para calcular un par de planos cuya intersección sea esa recta, hay que separar la ecuación de r en dos igualdades:

$$r \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 = 2y-4 \\ -y+2 = z+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3 = 0 \\ -x-y+1 = 0 \end{cases}$$

c) La distancia entre el punto B y la recta r . (3 puntos)

El plano π contiene al punto B . La recta r corta al plano π por un punto B' , que es perpendicular a B :



Por tanto, la distancia entre el punto B y la recta será la distancia entre B y B' .

Sabiendo la ecuación del plano π y de la recta r , hayamos el punto de corte de ambos (B'):

$$\pi: 2x + y - z - 5 = 0 \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituyendo } r \text{ en } \pi} 2(1 + 2\lambda) + y(2 + \lambda) - z(-1 - \lambda) - 5 = 0$$

$$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - (-1 - \lambda) - 5 = 0 \rightarrow 2 + 4\lambda + 2 + \lambda + 1 + \lambda - 5 = 0$$

$$6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow B'(1, 2, 1)$$

La distancia entre B y B' será el módulo del vector $\overrightarrow{BB'}$:

$$\overrightarrow{BB'} = B' - B = (1, 2, 1) - (2, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

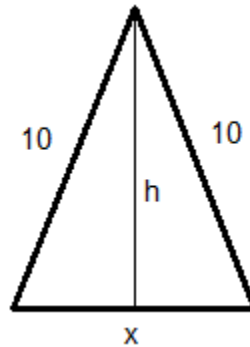
$$d(B, r) = d(B, B') = |\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} u = 1,73 u$$

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)

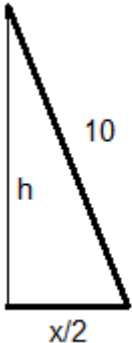
Tenemos el siguiente triángulo:



Nos piden el área en función de x ($A(x)$). Teniendo en cuenta que el área del triángulo es:

$$A = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{x \cdot h}{2}$$

Tenemos que expresar h en función de x . Aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned} \text{Hipotenusa}^2 &= \text{Cateto}^2 + \text{Cateto}^2 \\ 10^2 &= h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = 10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} \\ h &= \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} \rightarrow h = \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}} \end{aligned}$$

Por tanto, el área en función de x será:

$$A(x) = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}}}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{400 - x^2}}{4}$$

- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 puntos)

Derivamos la función:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{400 - x^2}}{4} \rightarrow A'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot \sqrt{400 - x^2})$$

Para ello, aplicamos la regla del producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

$$f = x \rightarrow f' = 1$$

$$g = \sqrt{400 - x^2} \rightarrow g' = \frac{1}{2\sqrt{400 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{400 - x^2}}$$

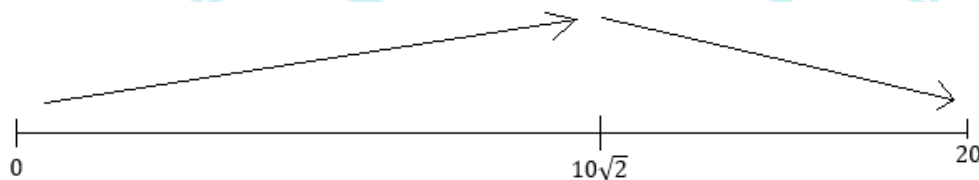
$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot \sqrt{400 - x^2}) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{400 - x^2} + \left(-\frac{x}{\sqrt{400 - x^2}} \right) \cdot x \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{400 - x^2}^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{400 - x^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot (200 - x^2)}{\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{200 - x^2}{2 \cdot \sqrt{400 - x^2}}
 \end{aligned}$$

Iguálamos a cero:

$$A'(x) = 0 \rightarrow \frac{200 - x^2}{2 \cdot \sqrt{400 - x^2}} = 0 \rightarrow 200 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 200 \rightarrow x = \sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2} = \pm 14,14$$

Estudiamos el cambio de signo en el intervalo $[0, 20]$. Para ello, representamos y tomamos un valor de cada intervalo antes y después de $10\sqrt{2}$ (descartamos $-10\sqrt{2}$ porque está fuera del intervalo):



$$A'(10) = \frac{200 - 10^2}{2 \cdot \sqrt{400 - 10^2}} = \frac{100}{2 \cdot \sqrt{300}} = \frac{50}{10 \cdot \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad A'(16) = \frac{200 - 16^2}{2 \cdot \sqrt{400 - 16^2}} = \frac{-56}{2 \cdot \sqrt{144}} = \frac{-28}{12} = \frac{-7}{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}} > 0 \rightarrow \text{creciente}$$

$$\frac{-7}{3} < 0 \rightarrow \text{decreciente}$$

Por tanto, la función es creciente de $(0, 10\sqrt{2})$ y decreciente de $(10\sqrt{2}, 20)$.

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

Según la recta anterior, se observa que el área del triángulo presenta un máximo relativo en $x = 10\sqrt{2}$ cm.

El valor de esa área máxima es:

$$\begin{aligned}
 A(10\sqrt{2}) &= \frac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2}}{4} = \frac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{400 - 200}}{4} = \frac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{200}}{4} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{200}{4} = 50 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$