

Proves d'accés a la universitat**Matemàtiques****Sèrie 1**

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

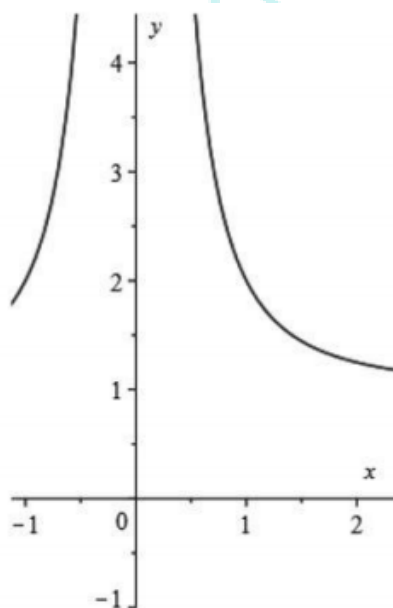
- a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a , ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}$$

[1,25 punts]

- b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]



2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1,25 punts]

- b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

[1,25 punts]

3.

- a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8, 8, 8)$ i té com a vectors directors $u = (1, 2, -3)$ i $v = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

- b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asymptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.
[2,5 punts]

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

- b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.

[1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

- a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

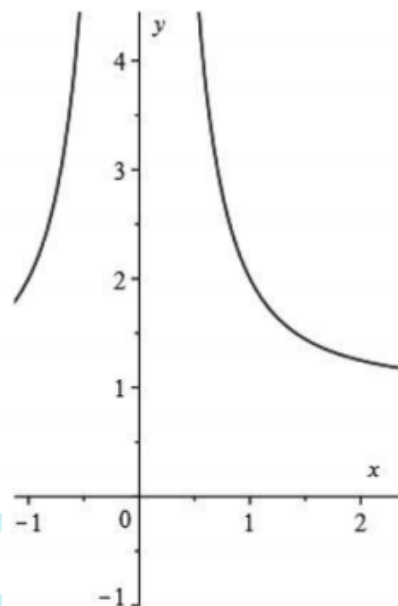
[1,25 punts]

- b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

CLASES
DE LAURA

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Hay que calcular la pendiente de la recta tangente, que viene dada por la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 = x^{-2} + 1 \rightarrow m(x) = f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

En un punto $P(a, f(a))$ del primer cuadrante, la ecuación de la recta tangente es:

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = \frac{1}{a^2} + 1 \\ f'(a) = -\frac{2}{a^3} \end{array} \right\} y - \left(\frac{1}{a^2} + 1 \right) = -\frac{2}{a^3}(x - a)$$

$$y - \frac{1}{a^2} - 1 = -\frac{2}{a^3}x + \frac{2}{a^3}a \rightarrow y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} + 1 \rightarrow y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1$$

- a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a , ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}$$

[1,25 punts]

El triángulo que forma con los ejes de coordenadas tiene vértices en $O(0,0)$, $A(0,y)$ y $B(x,0)$. Calculamos esas coordenadas teniendo en cuenta los puntos de corte de la función con los ejes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \\ y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1 \end{array} \right\} 0 = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1 \rightarrow \frac{2}{a^3}x = \frac{3}{a^2} + 1 \rightarrow \frac{2}{a^3}x = \frac{3 + a^2}{a^2}$$

$$x = \frac{a^3 \cdot (3 + a^2)}{2a^2} \rightarrow x = \frac{a \cdot (3 + a^2)}{2} \rightarrow x = \frac{3a + a^3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3a + a^3}{2}, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje } y \rightarrow x = 0 \\ y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1 \end{array} \right\} y = -\frac{2}{a^3} \cdot 0 + \frac{3}{a^2} + 1 \rightarrow y = \frac{3}{a^2} + 1 \rightarrow y = \frac{3 + a^2}{a^2}$$

$$y = \frac{3 + a^2}{a^2} \Rightarrow A\left(0, \frac{3 + a^2}{a^2}\right)$$

El área de un triángulo es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ \left. \begin{aligned} \text{base} &= \frac{3a + a^3}{2} \\ \text{altura} &= \frac{3 + a^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}} \text{Área} &= \frac{\left(\frac{3a + a^3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3 + a^2}{a^2}\right)}{2} \\ \text{Área} &= \frac{(3a + a^3) \cdot (3 + a^2)}{2a^2} = \frac{(3 + a^2) \cdot (3 + a^2)}{4a} = \frac{(3 + a^2)^2}{4a} \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a} = \text{Área}$$

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

Para calcular el área mínima derivamos y obtenemos las raíces de la primera derivada igualándola a cero:

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a} \rightarrow g'(a) = \frac{1}{4} \frac{d}{da} \left(\frac{(a^2 + 3)^2}{a} \right)$$

Aplicando la regla del cociente: $\left(\frac{c}{d}\right)' = \frac{c' \cdot d - d' \cdot c}{d^2}$

$$g'(a) = \frac{1}{4} \frac{\frac{d}{da} (a^2 + 3)^2 \cdot a - \frac{d}{da} (a) \cdot (a^2 + 3)^2}{a^2}$$

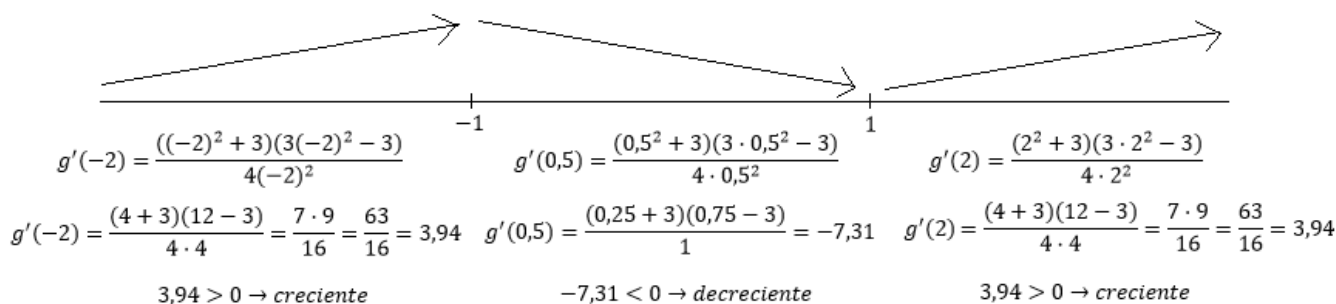
$$g'(a) = \frac{1}{4} \frac{2 \cdot 2a \cdot (a^2 + 3) \cdot a - 1 \cdot (a^2 + 3)^2}{a^2} \rightarrow g'(a) = \frac{1}{4} \frac{4a^2(a^2 + 3) - (a^2 + 3)^2}{a^2}$$

$$g'(x) = \frac{4a^2(a^2 + 3) - (a^2 + 3)^2}{4a^2} \rightarrow g'(x) = \frac{(a^2 + 3)(4a^2 - (a^2 + 3))}{4a^2}$$

$$g'(x) = 0 \rightarrow \frac{(a^2 + 3)(3a^2 - 3)}{4a^2} = 0$$

$$(a^2 + 3)(3a^2 - 3) = 0 \quad \begin{cases} a^2 + 3 = 0 \rightarrow a^2 = -3 \rightarrow a = \sqrt{-3} \rightarrow \text{No tiene solución} \\ 3a^2 - 3 = 0 \rightarrow 3a^2 = 3 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para estudiar el comportamiento de la función antes y después de ese valor:



Por tanto, el área es mínima en $a = 1$, y su valor es:

$$g(1) = \frac{(1^2 + 3)^2}{4 \cdot 1} = \frac{4^2}{4} = 4 \text{ u}^2$$

- 2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :**

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .**

[1,25 punts]

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro k .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases} \rightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23 + k \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro k para que se anule el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = (-10k + 4k + 40) - (40 + 40 - k^2) = -6k - 40 + k^2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow k^2 - 6k - 40 = 0 \rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{6 + 14}{2} = \frac{20}{2} = 10 \\ \frac{6 - 14}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1:** $k \neq -4, k \neq 10$

$$(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix} \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23 + k \end{array} \right)$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3 \quad |A^*| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2: $k = -4$

$$(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & | & 19 \\ -4 & 2 & 8 & | & 28 \\ 5 & 1 & 4 & | & 19 \end{pmatrix}$$

La 1ª y la 3ª filas son iguales en ambas matrices, por lo que se elimina la 3ª fila y se determina que:

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2 \quad |A^*| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

- Caso 3: $k = 10$

$$(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & | & 19 \\ 10 & 2 & 8 & | & 28 \\ 5 & 1 & -10 & | & 33 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 19 \\ 10 & 2 & 28 \\ 5 & 1 & 33 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 19 \\ 10 & 8 & 28 \\ 5 & -10 & 33 \end{vmatrix} = 1460 - 1900 + 560 - 760 + 1400 - 1320 = -560 \neq 0$$

$$rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow \text{Sistema Incompatible (SI)} \\ \text{No tiene solución}$$

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

[1,25 punts]

Si $k = 0$:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 0 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right)$$

Quedando así:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ -4z = 4 \end{cases} \rightarrow z = -1 \xrightarrow{z=-1} 2y - 8 = 28 \rightarrow 2y = 36 \rightarrow y = 18$$

$$5x + y + 4z = 19 \xrightarrow{y=18, z=-1} 5x + 18 - 4 = 19 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = 1$$

Por tanto, la solución al sistema es:

$$x = 1$$

$$y = 18$$

$$z = -1$$

3.

a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8, 8, 8)$ i té com a vectors directores $u = (1, 2, -3)$ i $v = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto. Así, el plano π será:

$$P(8, 8, 8)$$

$$\vec{u} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{v} = (-1, 0, 3)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 8 & y - 8 & z - 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$[6(x - 8) + 3(y - 8)] - [-2(z - 8) + 3(y - 8)] =$$

$$[6x - 48 + 3y - 24] - [-2z + 16 + 3y - 24] =$$

$$6x - 72 + 3y + 2z - 3y + 8$$

$$\pi: 6x + 2z - 64 = 0 \rightarrow \pi: 3x + z - 32 = 0$$

- b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

Para que el punto pertenezca al plano π , debe haber un único valor para cada parámetro que multiplica a los vectores. Para ello, hay que sustituir el punto en la ecuación del plano y que se cumpla:

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, -5, a) \\ \pi: 3x + z - 32 = 0 \end{array} \right\} 3 \cdot 1 + a - 32 = 0 \rightarrow a = 32 - 3 \rightarrow a = 29$$

Para calcular la ecuación de la recta perpendicular al plano π necesitamos un punto por el que pase (el punto Q) y un vector director (el vector normal del plano):

$$r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r = \vec{n} = (3, 0, 1)$$

Ahora podemos calcular la ecuación de la recta r :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(1, -5, 29) \\ \vec{u}_r = (3, 0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals.

Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.

[2,5 punts]

La ecuación de una asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$. Nos dicen que la pendiente tiene que ser 1:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{m=1} 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x} \\ 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \\ 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} a = a \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Para obtener los extremos hay que derivar la función e igualarla a cero para $x = 2$:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x} \xrightarrow{a=1} f(x) = \frac{x^2+b}{x}$$

Aplicando la regla del cociente: $\left(\frac{c}{d}\right)' = \frac{c' \cdot d - d' \cdot c}{d^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + b) \cdot x - \frac{d}{dx}(x) \cdot (x^2 + b)}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 + b)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - b}{x^2} = \frac{x^2 - b}{x^2}$$

Igualando a cero para $x = 2$:

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{2^2 - b}{2^2} = 0 \rightarrow 4 - b = 0 \rightarrow b = 4$$

Para comprobar si se trata realmente de un mínimo debemos hacer la segunda derivada y ver si es mayor de cero:

Regla del cociente

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \xrightarrow{\left(\frac{c}{d}\right)' = \frac{c' \cdot d - d' \cdot c}{d^2}} f''(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 4) \cdot x^2 - \frac{d}{dx}(x^2) \cdot (x^2 - 4)}{(x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2 - 4)}{x^4}$$

$$f''(2) = \frac{2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 \cdot (2^2 - 4)}{2^4} = \frac{2^4}{2^4} = 1 > 0 \rightarrow \text{Es un mínimo}$$

5. Sigue la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

Tomando la matriz X como:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión:

$$AX = I - 3X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -3a - 4c & -3b - 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -3a - 4c & -3b - 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3a & -3b \\ -3c & 1 - 3d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 1 - 3a \\ b + d = -3b \\ -3a - 4c = -3c \\ -3b - 4d = 1 - 3d \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Separando según incógnitas}} \left. \begin{array}{l} 4a + c = 1 \\ -3a - c = 0 \\ 4b + d = 0 \\ -3b - d = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a + c = 1 \\ -3a - c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} a = 1 \xrightarrow{a=1} c = 1 - 4 \rightarrow c = -3$$

$$\begin{cases} 4b + d = 0 \\ -3b - d = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} b = 1 \xrightarrow{b=1} d = -4$$

Por tanto, la matriz X será:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.

[1,25 punts]

La inversa de la matriz X se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$X^{-1} = \frac{Adj(X^T)}{|X|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

Vamos a comprobarlo:

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1 \rightarrow |X| \neq 0 \rightarrow \text{La matriz } X \text{ es invertible.}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior.

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(X^T) = \begin{pmatrix} +(-4) & -(-3) \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(X^T) = \begin{pmatrix} +(-4) & -(-3) \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$X^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Como la tangente es paralela a la recta $3x - y = 4$, debe tener la misma pendiente:

$$y = 3x - 4 \xrightarrow{y=mx+n} m = 3$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función:

$$m(x) = f'(x)$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} f(x) = x^3 \\ f'(x) = 3x^2 \end{matrix}} \right\} m(x) = f'(x) \rightarrow 3 = 3x^2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

Como nos dicen que se trata de un punto del tercer cuadrante, las coordenadas x e y son negativas. Por tanto, nos quedamos con $x = -1$.

Calculamos los parámetros de la ecuación de la recta tangente para $x_0 = -1$:

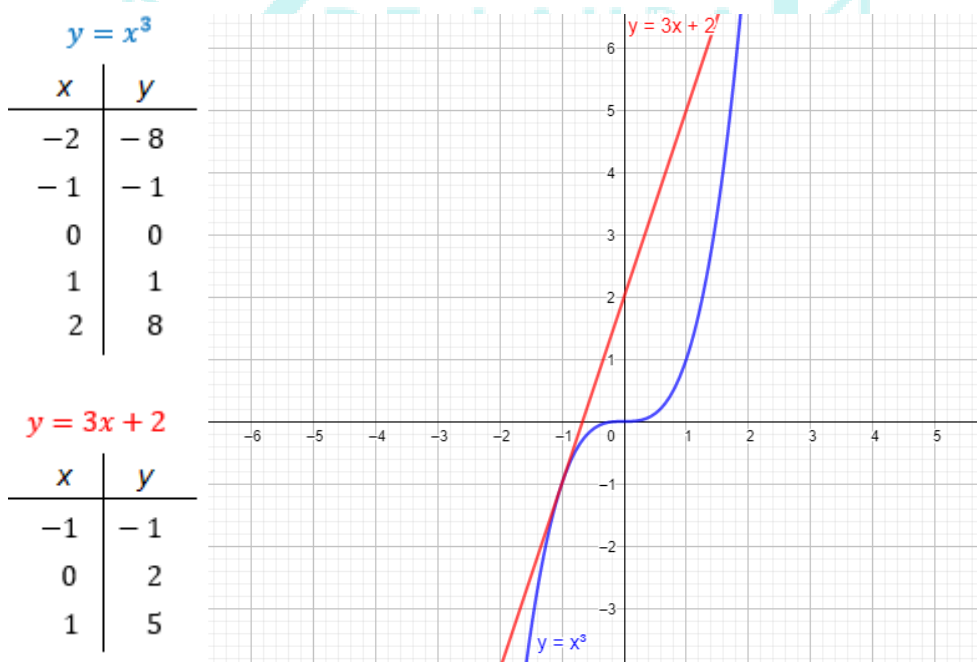
$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 = -1$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1)^2 = 3 = 3$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - (-1) = 3(x - (-1)) \rightarrow y = 3x + 2 \rightarrow g(x)$$

Para hacer un dibujo aproximado de la gráfica hacemos una tabla de valores para $f(x)$ y otra para la recta tangente, teniendo en cuenta que el dominio de ambas es todo $\mathbb{R}$.



b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

El área pedida es la integral definida entre los puntos de corte de ambas funciones.

Por tanto, en primer lugar hay que calcular los puntos de corte de las funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{array} \right\} f(x) = y \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ x = -1 \leftarrow -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Las raíces son: $x = -1$ (doble), $x = 2$

Así, el área es la integral definida entre -1 y 2 en valor absoluto de una función menos la otra:

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(S) &= \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 (3x + 2 - x^3) dx = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] = \\ &= [-4 + 6 + 4] - \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right] = 6 - \frac{-1 + 6 - 8}{4} = \frac{27}{4} = 6,75 u^2 \end{aligned}$$