

INTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array} \right\}$$

Se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
- b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

- a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

- c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan el 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$, está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).
d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

SOLUCIONES JULIO 2020

A.1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro a .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases} \rightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro a para que se anule el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+a) - (1-a^2) = a + a^2 = a \cdot (1+a)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow a \cdot (1+a) = 0 \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1:** $a \neq 0, a \neq -1$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array} \right)$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2: $a = -1$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (2 + 1) = -4 \rightarrow |A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow$ *Sistema Incompatible (SI)*
No tiene solución

- Caso 3: $a = 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado (SCI)*
Infinitas soluciones

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Si $a = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ \textcolor{red}{-y + z = 0} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Para resolver este sistema, de infinitas soluciones, es necesario fijar parámetros:

$$N^{\circ} \text{ parámetros} = N^{\circ} \text{ incógnitas} - N^{\circ} \text{ ecuaciones no nulas} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, hay que fijar un parámetro:

$$z = \lambda$$

Resolviendo el sistema en función de este parámetro:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = z \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{array}$$

Así, las soluciones son:

$$x = 1 - \lambda$$

$$y = \lambda$$

$$z = \lambda$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

A.2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.**

El teorema de Bolzano dice que si tenemos una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Nos dicen que comprobemos que $f(x) = g(x)$.

Por tanto,

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$$

Esta función es continua en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio (cumple el primer requisito del teorema de Bolzano).

Ahora debemos comprobar que la función tome valores de signo contrario en los extremos o requisito del teorema de Bolzano). Calculamos:

$$h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 = -3$$

$$h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 1 = 1.239$$

Se cumplen ambos requisitos, por tanto, se cumple el teorema de Bolzano. Existe, al menos, un $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$:

$$h(c) = 0 \rightarrow f(x) - g(x) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$$

Queda así justificado que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

Hay que calcular la pendiente de la recta tangente, que viene dada por la derivada de la función:

$$m(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Para obtener los extremos hay que derivar la pendiente e igualarla a cero:

$$m'(x) = f''(x) = 6x + 6$$

$$6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$

Para comprobar si se trata de un máximo o un mínimo debemos hacer la segunda derivada de la pendiente, es decir, la derivada de orden 3 de la función:

$$m''(x) = f'''(x) = 6 > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

Por tanto, tenemos un mínimo en $x = -1$. Ahora hay que calcular la recta tangente en este punto. La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculando:

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -3$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - 1 = -3(x + 1) \rightarrow y = -3x - 2$$

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \frac{1}{6} \cdot \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x} dx = \frac{1}{6} \cdot \int_1^2 x^2 + 3x - \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 3x dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right) = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln x \right) \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \ln 2 \right) \right] - \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \ln 1 \right) \right] = \\ &= \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8}{3} + 6 - \ln 2 \right) \right] - \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 0 \right) \right] = \frac{-3 \cdot \ln 2 + 26}{18} - \frac{11}{36} = 1,02336\end{aligned}$$

A.3. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .

Expresamos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Sacamos el vector director y un punto de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r(0, -2, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 3) \end{matrix}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_s(-1, -4, 0) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 1) \end{matrix}$$

El vector que determinan esos puntos son:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (-1, -4, 0) - (0, -2, 1) = (-1, -2, -1)$$

Como se puede observar, las rectas no son paralelas (ya que no tienen el mismo vector director ni uno es múltiplo del otro).

Si el $rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3$ las rectas se cruzan. De lo contrario, las rectas se cortan.

Para saber el rango debemos calcular el determinante de esa matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 12 - 1) - (3 - 2 - 2) = -11 \neq 0 \rightarrow rg = 3 \rightarrow \text{Se cruzan}$$

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

El plano π debe ser perpendicular a la recta r ($\pi \perp r$), por tanto, un vector normal al plano ($\vec{n}_\pi$) será:

$$\vec{n} = \vec{u}_r = (1, 1, 3)$$

Así, la ecuación del plano será:

$$x + y + 3z + D = 0$$

Considerando el punto $P(2, -1, 5)$ por el que pasa:

$$2 - 1 + 3 \cdot 5 + D = 0 \rightarrow D = -16$$

Por tanto, la ecuación del plano será:

$$\pi: x + y + 3z - 16 = 0$$

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto. Así, el plano π' estará formado por los vectores directores de ambas rectas y un punto de la recta s (porque el plano contiene esta recta):

$$\vec{u}_r = (1, 1, 3)$$

$$\vec{u}_s = (2, -1, 1)$$

$$P_s(-1, -4, 0)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi': \begin{vmatrix} x - x_s & y - y_s & z - z_s \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \\ u_{sx} & u_{sy} & u_{sz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y + 4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$[(x + 1) + 6(y + 4) - z] - [2z - 3(x + 1) + (y + 4)] =$$

$$[x + 1 + 6y + 24 - z] - [2z - 3x - 3 + y + 4] =$$

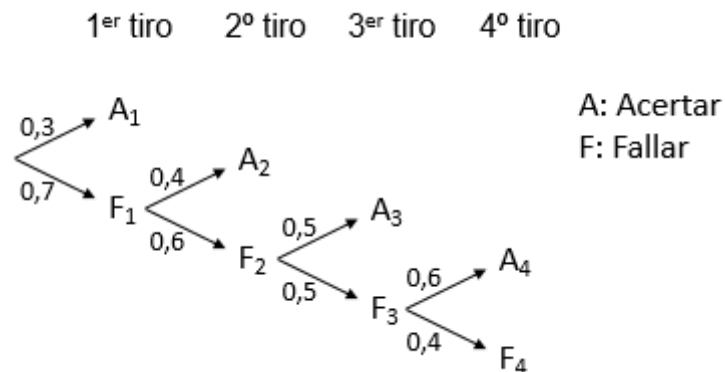
$$x + 6y - z + 25 + 3x - y - 2z - 1$$

$$\pi': 4x + 5y - 3z + 24 = 0$$

A.4. Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

El objetivo es explotar el globo, por lo que una vez lo haya conseguido se termina el juego.



La probabilidad (P_1) de que no se haga el cuarto disparo será:

$$P_1 = \text{Probabilidad de acertar 1}^{\text{er}} \text{ tiro} + \text{Probabilidad de fallar 1}^{\text{er}} \text{ tiro y acertar el 2}^{\text{o}} \\ + \text{Probabilidad de fallar 1}^{\text{er}} \text{ tiro y fallar el 2}^{\text{o}} \text{ y acertar el 3}^{\text{o}}$$

Es decir:

$$P_1 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ P_1 = 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,79$$

- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

La probabilidad (P_2) de que falle todo será:

$$P_2 = \text{Probabilidad de fallar 1}^{\text{er}} \text{ tiro y 2}^{\text{o}} \text{ tiro y 3}^{\text{er}} \text{ y 4}^{\text{o}} \text{ tiro} \\ P_2 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$$

- c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan el 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Estamos ante una distribución binomial $B(n, p)$, donde:

n : n^{o} pruebas

p : probabilidad de éxito

En este caso:

$$n = 10$$

$$p = 0,85$$

La función de probabilidad de esta función es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

siendo:

k : nº éxitos

q : probabilidad de fracaso

Así:

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^{10-6}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! (10-6)!} = 210$$

Por tanto:

$$P(X = 6) = 210 \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04009$$

B.1. Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Establecemos la siguiente nomenclatura:

x : precio del kg de doradas

y : precio del kg de lubinas

z : precio del kg de rodaballos

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = y + 0,11 \end{cases}$$

Resolvemos:

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = y + 0,11 \end{cases} \rightarrow z = \frac{63600000}{7400000} = 8,59$$

Así, nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000 \cdot 8,59 = 275800000 \\ x = y + 0,11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 63566000 = 275800000 \\ x = y + 0,11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y = 212234000 \\ x - y = 0,11 \end{cases}$$

$$\cdot 23440000 \begin{cases} 13740000x + 23440000y = 212234000 \\ 23440000x - 23440000y = 2578400 \end{cases}$$

$$37180000x = 214812400 \rightarrow x = 5,78$$

$$y = x - 0,11 \rightarrow y = 5,78 - 0,11 = 5,67$$

Por tanto, el precio de cada pescado será:

Doradas: 5,78 €/kg

Lubinas: 5,67 €/kg

Rodaballos: 8,59 €/kg

B.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

La función es continua entre $[-4, 1]$ por ser polinómica, y entre $(1, 4]$ por ser también polinómica.

Tenemos que estudiar la continuidad en $x = 1$, ya que en los puntos donde la función cambia de definición pueden existir discontinuidades:

$$f(1) = (1-1)^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Como existe límite en el punto 1 y coincide con el valor que toma la función en ese punto ($\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$) la función es continua en $x = 1$.

Por tanto, la función es continua en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

La función es derivable entre $[-4, 1)$ y entre $(1, 4]$ por ser polinómica en ambos casos.

Calculamos las derivadas laterales en $x = 1$ para estudiar la derivabilidad en ese punto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \text{ la función es derivable en } x = 1$$

Por tanto, la función es derivable en $[-4, 4]$.

Ahora analizamos el crecimiento de la función. Para ello, obtenemos las raíces de la primera derivada:

$$2(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para calcular el signo de la derivada:

$$\begin{array}{c} \hline | \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} f'(0) = 2(0-1) = -2 & f'(2) = 3(2-1)^2 = 3 \\ -2 < 0 \rightarrow \text{decreciente} & 3 > 0 \rightarrow \text{creciente} \\ \searrow & \nearrow \\ & \text{Mín.} \end{array}$$

Por tanto, la función es decreciente entre $(-4, 1)$ y creciente entre $(1, 4)$. En $x = 1$ presenta un mínimo relativo.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$, está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

La función $g(x)$ es:

$$g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se trata de una función definida, ya que para cada valor de x existe un único valor de y .

La continuidad de una función definida a trozos depende de la continuidad de las funciones que la componen, pero hay que estudiar los puntos donde cambia su definición, ya que en ellos pueden existir discontinuidades.

En este caso, el dominio de $g(x)$ es todo $\mathbb{R}$, ya que la función es continua de $(-\infty, 1]$ y de $(1, \infty)$, ya que en ambos tramos la función es polinómica.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$g(1) = 2(1 - 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x - 1)^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \\ \text{existe } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \end{array}$$

Como existe límite en el punto 1 y coincide con el valor que toma la función en ese punto ($\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$) la función es continua en $x = 1$.

Por tanto, la función $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Calculamos las derivadas laterales en $x = 1$ para estudiar la derivabilidad en ese punto:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 6(x - 1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 6(x - 1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) \\ \text{la función NO es derivable en } x = 1 \end{array}$$

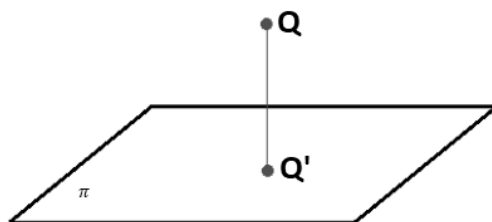
Por tanto, la función $g(x)$ no es derivable en $x = 1$.

$$g(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{1\}$$

B.3. Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .

La proyección de Q sobre el plano π es el punto Q' , que está contenido en el plano y es la intersección del plano con la recta perpendicular al mismo y que pasa por el punto Q .



Para obtener la proyección necesitamos calcular la ecuación de la recta QQ' (a la que llamaremos r), que pasa por el punto Q y es perpendicular al plano. Así, necesitamos un punto (el punto Q) y un vector director (el vector normal del plano):

$$r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r = \vec{n} = (1, 2, -3)$$

Ahora podemos calcular la ecuación de la recta r :

$$\begin{cases} Q(-1, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -3) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

El punto Q' (proyección de Q sobre π) es el punto de corte de r con π . Se obtiene sustituyendo r en la ecuación del plano π :

$$(-1 + \lambda) + 2 \cdot 2\lambda - 3 \cdot (1 - 3\lambda) = 4 \rightarrow -1 + \lambda + 4\lambda - 3 + 9\lambda = 4$$

$$14\lambda = 8 \rightarrow \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Proyección } Q': \begin{cases} x = -1 + \frac{4}{7} = -\frac{3}{7} \\ y = 0 + 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{7} \\ z = 1 - 3 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{5}{7} \end{cases} \rightarrow Q' \left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7} \right)$$

b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .

Dos planos paralelos tienen el mismo vector director. Por tanto:

$$\text{Si } \pi' \parallel \pi \rightarrow \vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_{\pi} \rightarrow \pi': x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

Como conocemos un punto del plano (punto P) y el vector director del mismo, se puede obtener la ecuación del plano π' :

$$\begin{cases} P(-3, 1, 2) \\ \pi': x + 2y - 3z + \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow -3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + \lambda = 0$$

$$-3 + 2 - 6 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 7$$

Por tanto, la ecuación del plano π' , paralelo al plano π y que pasa por P , será:

$$\pi': x + 2y - 3z + 7 = 0$$

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

Se busca el plano π'' .

Como sabemos, el vector normal a un plano es un vector perpendicular al mismo. Por tanto, un vector director del plano π'' será el vector normal de π :

$$\text{Como } \pi'' \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi''_1}} = \overrightarrow{n_\pi}$$

Teniendo en cuenta que el plano π'' contiene tanto al punto P como al punto Q , el vector $\overrightarrow{PQ}$ será otro vector director de π'' :

$$\text{Como } P \text{ y } Q \in \pi'' \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi''_2}} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 0, 1) - (-3, 1, 2) = (2, -1, -1)$$

Eligiendo uno de los puntos, por ejemplo $P(-3, 1, 2)$, como punto del plano, tenemos:

$$\pi'': \begin{cases} \overrightarrow{u_{\pi''_1}} = (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{u_{\pi''_2}} = (2, -1, -1) \\ P(-3, 1, 2) \end{cases}$$

Así, la ecuación del plano π'' será:

$$\pi'': \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi'': \begin{vmatrix} x + 3 & y - 1 & z - 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[-2(x + 3) - 6(y - 1) - (z - 2)] - [4(z - 2) - (y - 1) + 3(x + 3)] = 0$$

$$(-2x - 6 - 6y + 6 - z + 2) - (4z - 8 - y + 1 + 3x + 9) = 0$$

$$-5x - 5y - 5z = 0$$

Por tanto, la ecuación del plano π'' es:

$$\pi'': -5x - 5y - 5z = 0$$

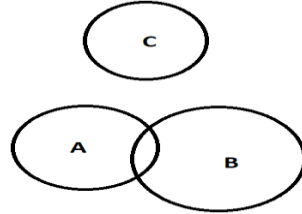
B.4. Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

Dos sucesos son compatibles si tienen algún elemento en común, es decir, si $A \cap B \neq \emptyset$

$A \cup B$ está compuesto por todos los sucesos elementales no repetidos que los conjuntos A y B tienen en común y no en común.

Nos dicen que C es incompatible con A y con B , por tanto, también es incompatible con $A \cup B$:



$$C \cap (A \cup B) = \emptyset \rightarrow P(C \cap (A \cup B)) = 0$$

El suceso C no tiene ningún elemento en común con $A \cup B$.

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

Dos sucesos son independientes cuando la probabilidad de cada uno de ellos no está influida porque el otro suceso ocurra o no.

Los sucesos A y B son independientes si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Vamos a comprobarlo. Sustituyendo las probabilidades en la primera condición:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0,125 = 0,5 \cdot 0,25 \rightarrow 0,125 = 0,125$$

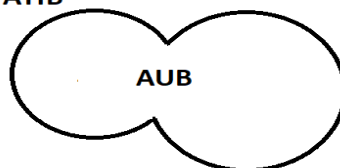
Como se cumple esta condición, los sucesos A y B son independientes.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ establece la probabilidad de que no ocurra el suceso A y de que no ocurra el suceso B , es decir, la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$\bar{A} \cap \bar{B}$



La probabilidad de que ocurra A o que ocurra B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$$

Así, la probabilidad de que no ocurra ni A ni B es:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,625 = 0,375$$

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que no ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A .

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$$

$P(\bar{B} \cap A)$ establece la probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B , es decir, de que sólo ocurra el suceso A :

$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{B} \cap A) = 0,5 - 0,125 = 0,375$$

Así, tenemos:

$$P(\bar{B}|A) = \frac{0,375}{0,5} = 0,75$$

CLASES
DE LAURA