

Prueba de Evaluación de Bachillerato Para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura
Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1 h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas.

PREGUNTAS

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

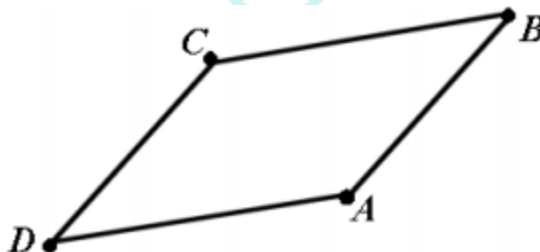
- a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)
b) Calcule la inversa para $k = 1$. (1 punto)

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (2 puntos)

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases}$$

3. Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$
a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)
b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 3, -2)$, $B(4, 3, 1)$ y $C(1, 0, 1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



- a) Calcule el cuarto vértice D . (1 punto)
b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

5.

- a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$. (1 punto)
- b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)
- b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (1 punto)

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

- a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)
- b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

8. Resuelva la integral

$$\int \frac{-x + 7}{x^2 + x - 2} dx$$

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C . A la empresa A le compra el 40% de los lotes, a B el 25% y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1% de los lotes, de B el 2% y de C el 3%. Elegido un lote al azar, se pide:

- a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)
- b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B . (1 punto)

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60%. Si realiza 8 tiros a canasta

- a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)
- b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)
- c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)

La inversa de una matriz se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (k - 2k - 1) - (-k^2 - 1 + 2) = k^2 - k - 2$$

Igualemos a cero:

$$|A| = 0 \rightarrow k^2 - k - 2 = 0$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

En estos dos casos el determinante de A es nulo, por lo que no existiría la inversa.

Por tanto, cuando $k \neq -1$ o $k \neq 2$ la matriz A es invertible.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

(1 punto)

Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz A se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 2 - 1) - (-1 - 1 + 2) = -2 - 0 = -2$$

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones.

(2 puntos)

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases}$$

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro a .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases} \longrightarrow (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda + 3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro λ para que se anule el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2 + \lambda^2 + 3\lambda) - (2\lambda^2) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3 + 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ \frac{-3 - 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1: $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & | & \lambda \\ 0 & \lambda + 3 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2: $\lambda = 1$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 4 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 4) - (4 - 4) = 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

- Caso 3: $\lambda = 2$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 10) - (10 - 16) = -6 + 6 = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-4 + 8) - (4) = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 10) - (-4 - 8) = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

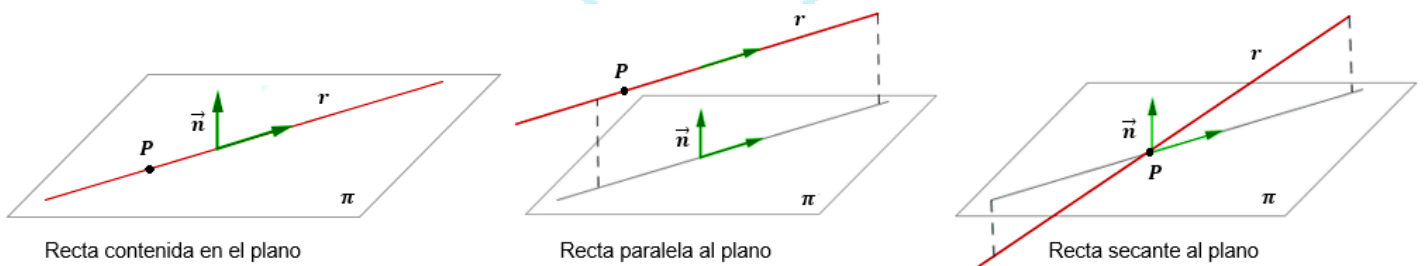
$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

- 3. Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por**

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$$

- a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)**

Las posiciones relativas de una recta y un plano son:



Como se puede observar, el vector normal al plano ($\vec{n}$) y el vector director de la recta ($\vec{u}_r$) son perpendiculares en los dos primeros casos (forman un ángulo de 90°). Por tanto, para determinar la posición relativa, lo primero que haremos será calcular el ángulo que forman ambos vectores

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo. Vamos a comprobarlo:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (3, -3, 3) \end{array} \right\} \vec{n} \cdot \vec{u}_r = (2, 1, -1) \cdot (3, -3, 3) = 6 - 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{Vectores perpendiculares}$$

Como los vectores son perpendiculares, descartamos que la recta sea secante al plano. Así pues, la recta puede estar contenida en el plano o ser paralela al plano. Para establecer en qué situación nos encontramos, tenemos que comprobar si el punto P de la recta pertenece o no al plano:

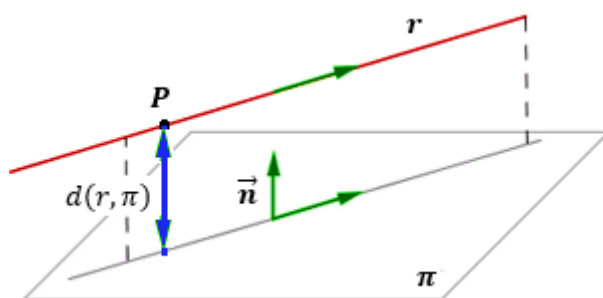
$$\left. \begin{array}{l} P(0, 2, 1) \\ \pi: 2x + y - z - 2 = 0 \end{array} \right\} 2 \cdot 0 + 2 - 1 - 2 = -1 \rightarrow -1 \neq 0 \rightarrow P \text{ no pertenece al plano}$$

Por tanto, la recta y el plano son paralelos.

b) Calcule la distancia de la recta al plano.

(1 punto)

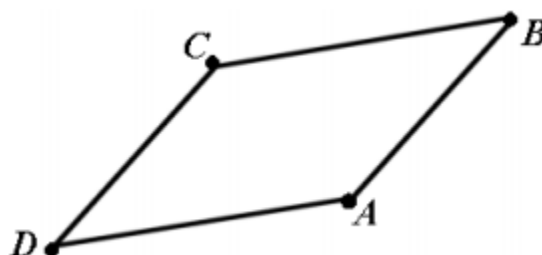
Como se puede observar, la distancia de la recta al plano será la distancia de cualquier punto de la recta al plano, ya que todos los puntos están a la misma distancia del plano.



$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 2, 1) \\ \pi: 2x + y - z - 2 = 0 \end{array} \right\} d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,41 \text{ u}$$

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 3, -2)$, $B(4, 3, 1)$ y $C(1, 0, 1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D .

(1 punto)

Al ser un paralelogramo, los lados son paralelos dos a dos y de la misma longitud. Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Considerando que las coordenadas del punto D son: $D(a, b, c)$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 1) - (1, 3, -2) = (3, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (1, 0, 1) - (a, b, c) = (1 - a, 0 - b, 1 - c)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 0, 3) \\ \overrightarrow{DC} = (1 - a, 0 - b, 1 - c) \end{array} \right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (3, 0, 3) = (1 - a, 0 - b, 1 - c)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 1 - a \\ 0 = -b \\ 3 = 1 - c \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = 1 - 3 = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 - 3 = -2 \end{array} \rightarrow D(-2, 0, -2)$$

b) Calcule el área del paralelogramo.

(1 punto)

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores con vértice común. Por ejemplo, vamos a calcularlo con $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$:

$$\text{Área } ABCD = |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}|$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 0, 1) - (4, 3, 1) = (-3, -3, 0)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 3, -2) - (4, 3, 1) = (-3, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (-3, -3, 0) \\ \overrightarrow{BA} = (-3, 0, -3) \end{array} \right\} \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - (9\vec{k} + 9\vec{j}) = 9\vec{i} - 9\vec{j} - 9\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = (9, -9, -9)$$

$$\text{Área } ABCD = |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + (-9)^2} = \sqrt{243} = 15,59 \text{ u}^2$$

5.

a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

Analizamos el crecimiento de la función y sus extremos relativos. Para ello, obtenemos las raíces de la primera derivada igualándola a cero:

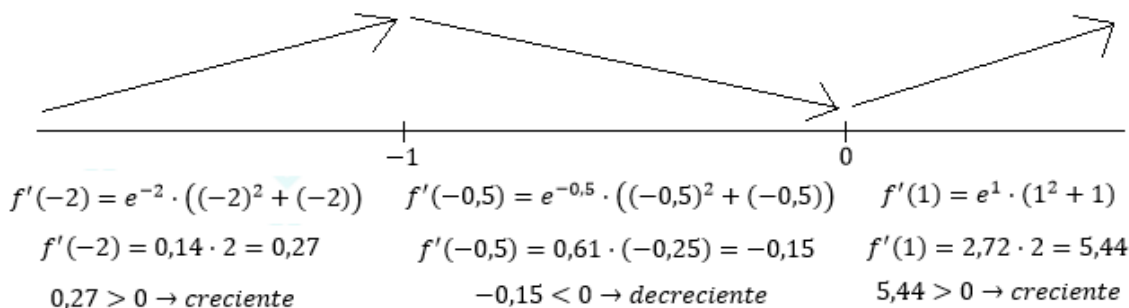
$$f(x) = e^x(x^2 - x + 1) \xrightarrow[\text{Regla del producto}]{(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f} f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) \cdot (x^2 - x + 1) + \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - x + 1) + (2x - 1) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 - x + 1 + 2x - 1) = e^x \cdot (x^2 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x \cdot (x^2 + x) = 0$$

$$e^x \cdot (x^2 + x) = 0 \quad \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ x^2 + x = 0 \rightarrow x \cdot (x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para estudiar el comportamiento de la función antes y después de ese valor:

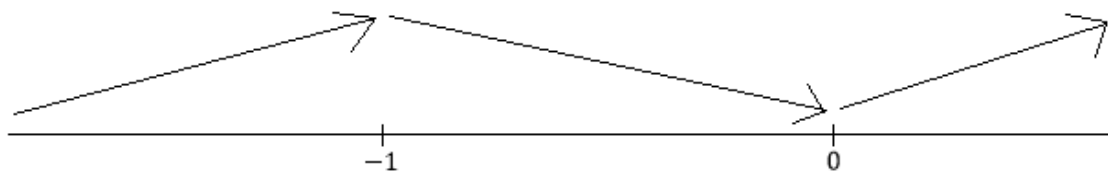


Por tanto, la función es creciente de $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ y decreciente de $(-1, 0)$. En $x = -1$ presenta un máximo relativo y en $x = 0$ tiene un mínimo relativo.

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

El teorema de Bolzano estudia las propiedades de las funciones en un intervalo. Según este teorema, si una función $g(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signos opuestos en los extremos (por lo que de esta forma corta al eje OX), entonces existe al menos una raíz de la función $g(x)$ en (a, b) , es decir, existe un punto c del intervalo (a, b) en el que se cumple que $g(c) = 0$.

Vamos a comprobarlo. En primer lugar, tenemos que calcular el intervalo en el que se cumplirá que $f(x) = 2$. Para ello, vamos a tener en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como el máximo y mínimo relativo:



En $x = -1 \rightarrow f(-1) = e^{-1}((-1)^2 - (-1) + 1) = 0,37 \cdot 3 = 1,10$

En el máx.
 $f(x) < 2$
Se descarta el intervalo $(-\infty, 0)$

En $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0(0^2 - 0 + 1) = 1$

En $x = 1 \rightarrow f(1) = e^1(1^2 - 1 + 1) = 2,72$

Por tanto, el intervalo donde $f(x) = 2$ es $(0, 1)$

Una vez calculado el intervalo, a partir de la ecuación proporcionada planteamos la función a estudiar:

$$g(x) = f(x) - 2 = e^x(x^2 - x + 1) - 2$$

Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica, por tanto, cumple el primer requisito, es decir, es continua en el intervalo $[0, 1]$.

Ahora vamos a calcular que valores toma la función en los extremos del intervalo:

$$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1 \rightarrow g(0) < 0$$

$$g(1) = f(1) - 2 = 2,72 - 2 = 0,72 \rightarrow g(1) > 0$$

Como podemos comprobar, la función toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo, es decir, cumple el segundo requisito.

Por tanto, por el teorema de Bolzano sabemos que existe un punto $c \in (0,1)$ en el que se cumple que $g(c) = 0$:

$$g(c) = 0 \xrightarrow{g(x)=f(x)-2} f(c) - 2 = 0 \rightarrow f(c) = 2$$

Por tanto, queda demostrado que existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$ y está en el intervalo $[0, 1]$.

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)

Tenemos que estudiar la continuidad en $x = 0$, ya que en los puntos donde la función cambia de definición pueden existir discontinuidades:

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^x}{x} = \frac{1 - e^0}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación aplico L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{x} = \frac{1 - e^0}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación aplico L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Para que la función sea continua, los tres valores deben coincidir:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Por tanto,

$$a = -1$$

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (1 punto)

La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Hay que calcular la pendiente de la recta tangente, que viene dada por la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{x} \xrightarrow[\text{Regla del cociente}]{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}} m(x) = f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(1 - e^x) \cdot x - \frac{d}{dx}(x) \cdot (1 - e^x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x \cdot x - 1 \cdot (1 - e^x)}{x^2} = \frac{-xe^x - 1 + e^x}{x^2}$$

Para $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1 - e^1}{1} = 1 - e$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{-1 \cdot e^1 - 1 + e^1}{1^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y - (1 - e) = -1(x - 1) \rightarrow y - 1 + e = -x + 1 \rightarrow y = -x + 2 - e$$

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)

Calculamos los puntos donde se cortan ambas curvas:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

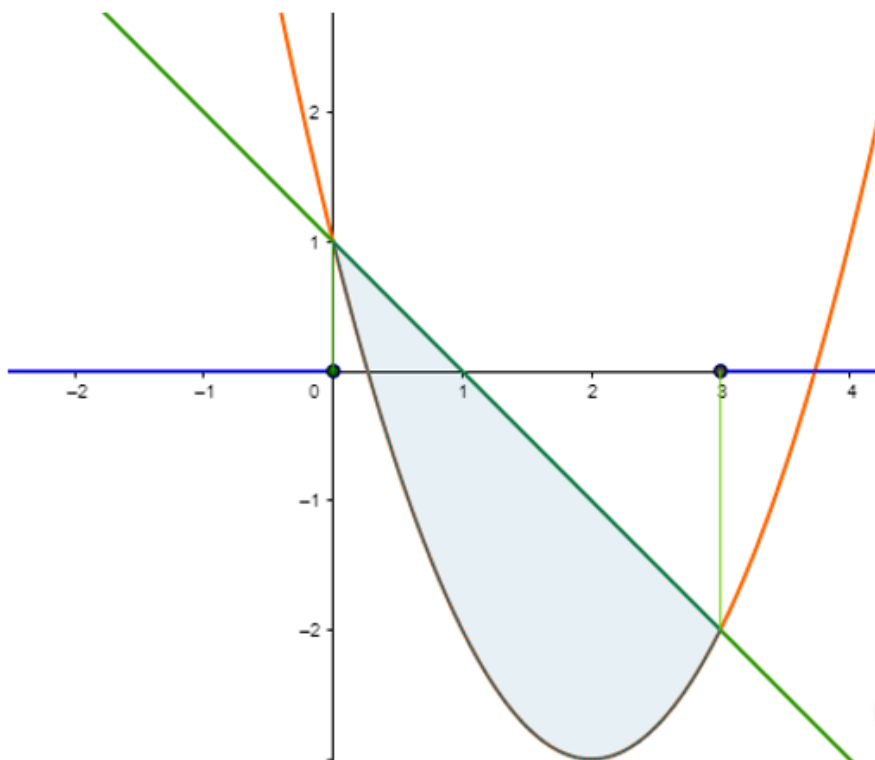
Realizamos una tabla de valores para cada función dentro de este intervalo:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

x	y
0	1
1	-2
2	-3
3	-2

$$g(x) = -x + 1$$

x	y
0	1
1	0
2	-1
3	-2



b) Calcule el área de dicha región.

(1,5 puntos)

El área pedida es la integral definida entre 0 y 3:

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (-x + 1 - x^2 + 4x - 1) dx = \\ &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right] = \\ &= \left[-9 + \frac{27}{2} \right] - [-0 + 0] = \frac{-18 + 27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 u^2 \end{aligned}$$

8. Resuelva la integral

$$\int \frac{-x + 7}{x^2 + x - 2} dx$$

Expresamos como suma de fracciones simples:

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{-x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{-x + 7}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

Eliminando denominador común:

$$-x + 7 = x(A+B) + 2A - B$$

Comparando:

$$\left. \begin{array}{l} -x = x(A+B) \rightarrow A+B = -1 \\ 7 = 2A - B \rightarrow 2A - B = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3A = 6 \rightarrow A = 2$$

$$A + B = -1 \rightarrow B = -1 - A \xrightarrow{A=2} B = -3$$

Así:

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{-x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

Por tanto, la integral puede expresarse como:

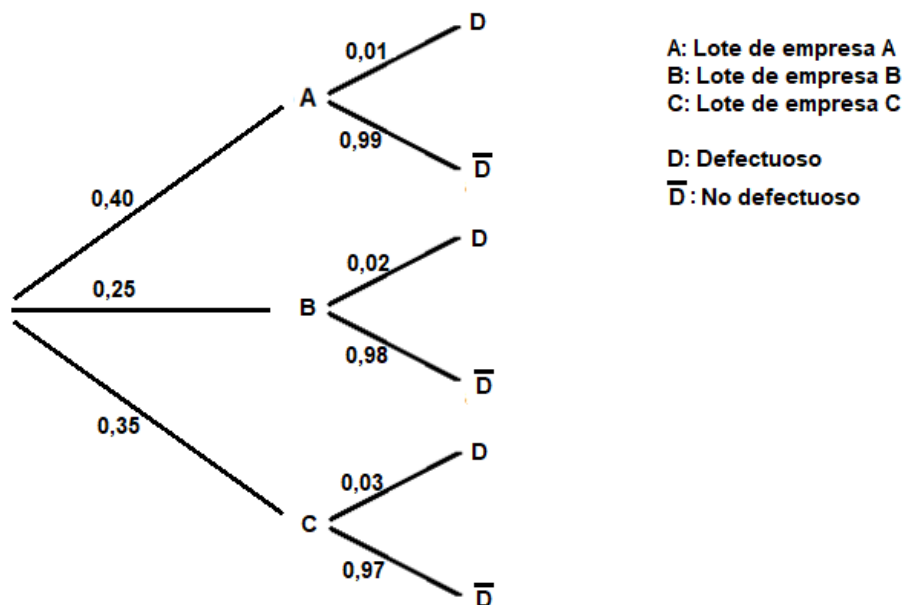
$$\begin{aligned} \int \frac{-x+7}{x^2+x-2} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{3}{x+2} dx = \\ &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - 3 \int \frac{1}{x+2} dx = 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

- 9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40% de los lotes, a B el 25% y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1% de los lotes, de B el 2% y de C el 3%. Elegido un lote al azar, se pide:**

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

(1 punto)

En primer lugar, realizamos el diagrama de árbol:



La probabilidad de que un lote sea defectuoso será:

$$\begin{aligned} P(D) = & \text{Probabilidad de que sea del lote A y defectuoso} + \\ & + \text{Probabilidad de que sea del lote B y defectuoso} + \\ & + \text{Probabilidad de que sea del lote C y defectuoso} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) = \\ &= 0,4 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 = 0,004 + 0,005 + 0,0105 = 0,0195 \end{aligned}$$

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B. (1 punto)

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que el lote lo haya fabricado la empresa B sabiendo que no es defectuoso:

$$P(B|\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$P(B \cap \bar{D})$ establece la probabilidad de que ocurra el suceso B y ocurra el suceso $\bar{D}$, es decir:

$$P(B \cap \bar{D}) = P(B) \cdot P(\bar{D}|B) = 0,25 \cdot 0,98 = 0,245$$

La probabilidad de que no sea defectuoso es:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,0195 = 0,9805$$

Así, tenemos:

$$P(B|\bar{D}) = \frac{0,245}{0,9805} = 0,25$$

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60%. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

Como cada tiro es independiente del anterior y la probabilidad de encestar es la misma en cada intento, estamos ante una distribución binomial $B(n, p)$, donde:

n : nº de tiros

p : probabilidad de encestar

En este caso:

$$n = 8$$

$$p = 0,6$$

La función de probabilidad de esta función es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

siendo:

k : nº éxitos (encestar)

q : probabilidad de fracaso (no encestar)

Así, la probabilidad de que enceste 5 triples es:

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^{8-5}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! (8-5)!} = 56$$

Por tanto:

$$P(X = 5) = 56 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^3 = 0,2787$$

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

Sea X la variable que representa el número de triples que encesta en 8 intentos, la probabilidad de que enceste al menos dos triples es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$\left. \begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{8}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^{8-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,4^8 = 0,00066 \\ P(X = 1) &= \binom{8}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^{8-1} = 8 \cdot 0,6 \cdot 0,4^7 = 0,0079 \end{aligned} \right\} P(X \geq 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,00066 + 0,0079) = 1 - 0,00856 = 0,9915$$

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

La media nos indica el valor medio de un fenómeno aleatorio, y se calcula como:

$$\mu = n \cdot p$$

En este caso:

$$\mu = 8 \cdot 0,6 = 4,8 \rightarrow \text{Aproximadamente unos 5 aciertos de media en 8 lanzamientos}$$

Y la desviación típica será:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{1,92} = 1,39 \text{ triples}$$

