

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
DISTRITO UNIVERSITARIO DE CANARIAS
FASE GENERAL
Curso 2019-2020**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

GRUPO A

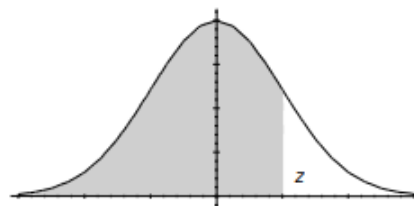
1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:
 - a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$. 1.25 pts
 - b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x) dx$ 1.25 pts
2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$
 - a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto
 - b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A , calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 pts
3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$
 - a. Estudie la posición relativa de r y s . 1,5 pts
 - b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$ 1 pto
4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
 - a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 pts
 - b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 pts

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$
 - a. Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 pts
 - Se cortan en el punto $P(1, 1)$
 - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.Dar las expresiones de las funciones resultantes.
 - b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función:
$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$
 1 pto
2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes. Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 pts
3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$
 - a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 . 1.25 pts
 - b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 pts
4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
 - a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1.25 pts
 - b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0.75 pts
 - c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 pts

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

- a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$.

El logaritmo neperiano existe para valores positivos, es decir, $x > 0$.

Al ser una función racional, el dominio son todos los números reales (todo $\mathbb{R}$) menos los valores que anulen el denominador:

$$x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Es decir, todos los números excepto el cero.

Como deben cumplirse ambas condiciones, el dominio de la función será:

$$\text{Dom}f(x) = (0, \infty)$$

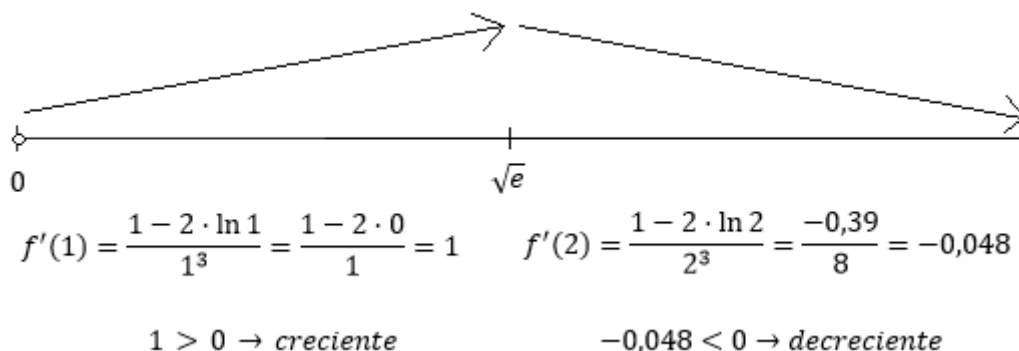
Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento derivamos la función e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow{\text{Regla del cociente } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}} f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\ln x) \cdot x^2 - \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \ln x}{(x^2)^2} = \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} \xrightarrow{\text{Simplificando}} f'(x) = \frac{x(1 - 2 \cdot \ln x)}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} \\ f'(x) &= 0 \rightarrow \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} = 0 \end{aligned}$$

$$1 - 2 \cdot \ln x = 0 \cdot x^3 \rightarrow 1 - 2 \cdot \ln x = 0 \rightarrow 1 = 2 \cdot \ln x \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 36}}{6} = \frac{14 \pm \sqrt{160}}{6} = \begin{cases} \frac{14 + \sqrt{160}}{6} = 4,44 \\ \frac{14 - \sqrt{160}}{6} = 0,23 \end{cases}$$

Representamos $\sqrt{e} \cong 1,65$ y tomamos un valor de cada intervalo, teniendo en cuenta el dominio:



Por tanto, la función es creciente de $(0, \sqrt{e})$ y decreciente de $(\sqrt{e}, \infty)$.

Como se puede observar, en $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo relativo.

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x) dx$

En primer lugar, calculamos la integral indefinida mediante integración por partes:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int f(x) dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

Definimos:

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Por tanto:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

Aplicando la regla de Barrow para definir la integral:

$$\int_1^e f(x) dx = \left[-\frac{\ln x + 1}{x} \right]_1^e = -\frac{\ln e + 1}{e} - \left(-\frac{\ln 1 + 1}{1} \right) = -\frac{1+1}{e} + \frac{0+1}{1} = -\frac{2}{e} + 1$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

La inversa de una matriz se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = [k \cdot (k-1) \cdot (k-3)] - [k \cdot (k-1) + k \cdot (k-1)] = \\ &= k \cdot (k-1) \cdot (k-3) - k \cdot (k-1) - k \cdot (k-1) = \\ &= k \cdot (k-1)[(k-3) - 1 - 1] = k \cdot (k-1) \cdot (k-5) \end{aligned}$$

Igualemos a cero:

$$|A| = 0 \rightarrow k \cdot (k-1) \cdot (k-5) = 0 \begin{cases} k = 0 \\ k-1 = 0 \rightarrow k = 1 \\ k-5 = 0 \rightarrow k = 5 \end{cases}$$

En estos tres casos el determinante de A es nulo, por lo que no existiría la inversa.

Por tanto, cuando $k \neq 0$, $k \neq 1$ o $k \neq 5$ la matriz A es invertible.

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A , calcule la matriz X que verifica que:

$A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

En primer lugar, despejamos la X de la ecuación:

$$A \cdot X = 24 \cdot I_3 \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot 24 \cdot I_3 \rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot 24 \cdot I_3 \rightarrow X = A^{-1} \cdot 24$$

Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz A se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - (2 + 2) = -8 - 4 = -12$$

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{-12} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo

$$X = A^{-1} \cdot 24 \rightarrow X = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 24 = -\frac{24}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = -2 \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s .

Expresamos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 7 - 2y \xrightarrow{y=\lambda} x = 7 - 2\lambda$$

$$r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x = 7 - 2\lambda \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} 7 - 2\lambda + \lambda - z = 4 \rightarrow 7 - \lambda - z = 4 \rightarrow z = 3 - \lambda$$

$$r: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -5 \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 0\lambda \\ y = -5 + 0\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Sacamos el vector director y un punto de cada recta:

$$r: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r(7,0,3) \\ \vec{u}_r = (-2,1,-1) \end{matrix}$$

$$s: \begin{cases} x = 2 + 0\lambda \\ y = -5 + 0\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_s(2,-5,0) \\ \vec{u}_s = (0,0,1) \end{matrix}$$

El vector que determinan esos puntos son:

$$\vec{P_r P_s} = P_s - P_r = (2, -5, 0) - (7, 0, 3) = (-5, -5, -3)$$

Como se puede observar, las rectas no son paralelas (ya que no tienen el mismo vector director ni uno es múltiplo del otro).

Si el $rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 3$ las rectas se cruzan. De lo contrario, las rectas se cortan.

Para saber el rango debemos calcular el determinante de esa matriz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 5) - (0 + 10 + 0) = -15 \neq 0 \rightarrow rg = 3 \rightarrow \text{Se cruzan}$$

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$

El plano π debe ser perpendicular a la recta r ($\pi \perp r$), por tanto, un vector normal al plano ($\vec{n}$) será:

$$\vec{n} = \vec{u}_r$$

Teniendo en cuenta que:

$$r: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r(7,0,3) \\ \vec{u}_r = (-2,1,-1) \end{matrix}$$

Por tanto, el plano π :

$$\pi \equiv \begin{cases} A(11, -2, 5) \\ \vec{n} = \vec{u}_r = (-2, 1, -1) \end{cases}$$

Así, la ecuación del plano será:

$$-2x + y - z + D = 0$$

Considerando el punto $A(11, -2, 5)$ por el que pasa:

$$-2 \cdot 11 + (-2) - 5 + D = 0 \rightarrow D = 29$$

Por tanto, la ecuación del plano será:

$$\pi: -2x + y - z + 29 = 0$$

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?

Sea X la variable que representa el tiempo que transcurre hasta la primera avería de una impresora de chorro de tinta:

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(1500, 200)$$

En este problema nos piden el porcentaje de impresoras que fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento:

$$P(X < 1000)$$

Como en este caso X sigue una distribución normal $N(\mu = 1500, \sigma = 200)$, es necesario tipificar, es decir, hacer un cambio de variable para poder usar la tabla de distribución normal $N(0,1)$. Se tipificará la variable Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Nos preguntan por $X < 1000$, por tanto:

$$P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) = P(Z < -2,5) \xrightarrow{\text{Z tiene que ser positivo, invertimos signo}} P(Z > 2,5)$$

Buscamos en la tabla el valor que se corresponde con $Z = 2,5$:

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964

$$Z = 2,5 \rightarrow P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$

El porcentaje será de 0,62%.

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Sea X :

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(1500, 200)$$

En este problema nos piden el porcentaje de impresoras que fallarán entre las 1000 y 2000 horas de funcionamiento:

$$P(1000 < X < 2000) = P(x < 2000) - P(x < 1000)$$

Como en este caso X sigue una distribución normal $N(\mu = 1500, \sigma = 200)$, es necesario tipificar, es decir, hacer un cambio de variable para poder usar la tabla de distribución normal $N(0,1)$. Se tipificará la variable Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

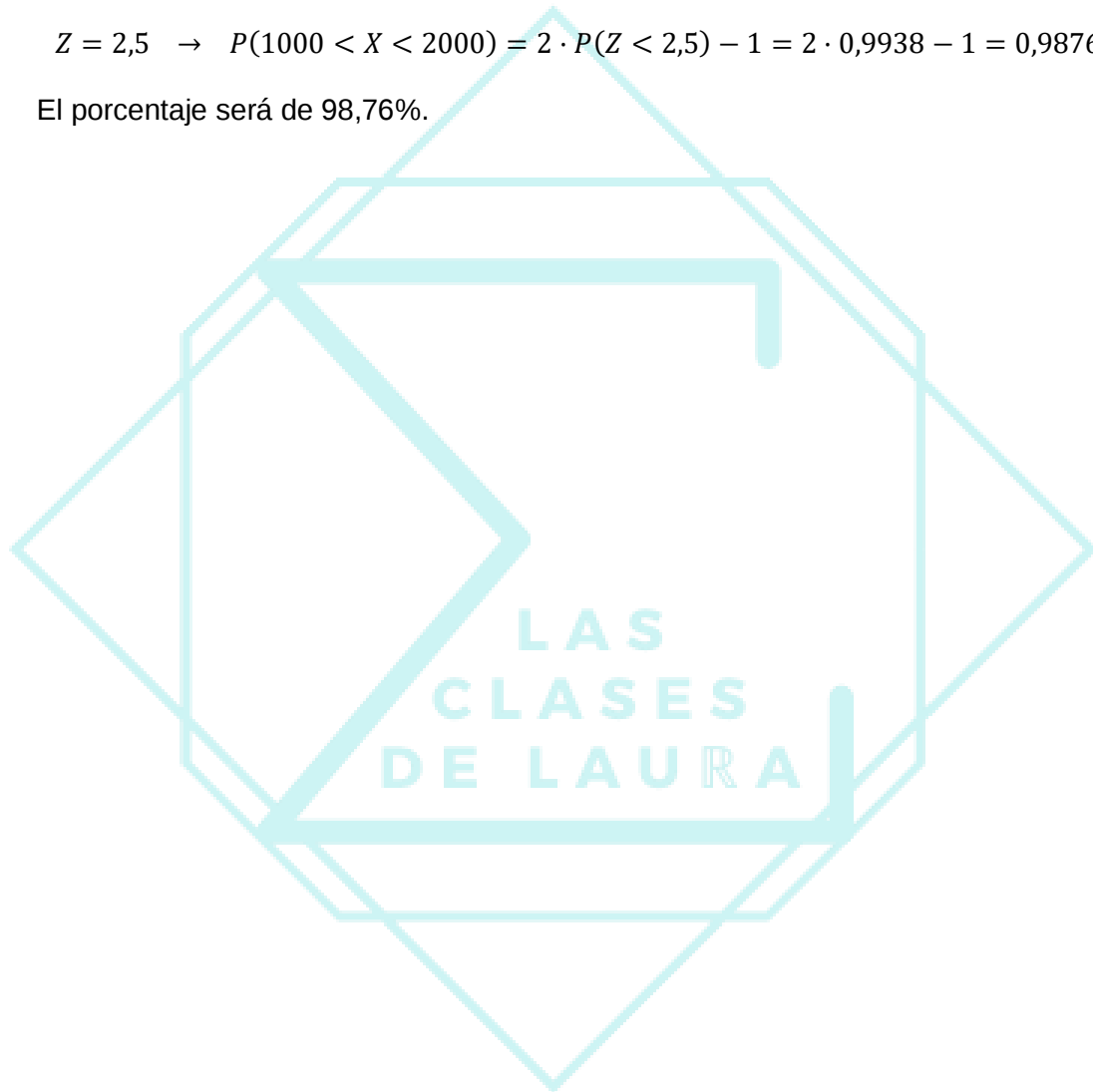
Nos preguntan por $1000 < X < 2000$, por tanto:

$$\begin{aligned} P\left(Z < \frac{2000 - 1500}{200}\right) - P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) &= P(Z < 2,5) - P(Z < -2,5) = \\ &= P(Z < 2,5) - P(Z > 2,5) = P(Z < 2,5) - (1 - P(Z < 2,5)) = \\ &= P(Z < 2,5) - 1 + P(Z < 2,5) = 2 \cdot P(Z < 2,5) - 1 \end{aligned}$$

El valor que encontramos en la tabla para $Z = 2,5$ es 0,9938 (ya lo vimos en el apartado anterior).

$$Z = 2,5 \rightarrow P(1000 < X < 2000) = 2 \cdot P(Z < 2,5) - 1 = 2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876$$

El porcentaje será de 98,76%.



GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$

a. Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:

- Se cortan en el punto $P(1, 1)$
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

Que se corten en el punto $P(1, 1)$ implica que ambas rectas pasan por ese punto. Por tanto:

$$f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^2 + b \xrightarrow{f(1)=1} 2 + a + b = 1$$

$$g(x) = -2x^3 + c \rightarrow g(1) = -2 \cdot 1^3 + c \xrightarrow{g(1)=1} -2 + c = 1$$

De estas dos expresiones se concluye que:

$$2 + a + b = 1 \rightarrow a + b = -1$$

$$\boxed{c = 3}$$

La siguiente condición expresa que en el punto $P(1, 1)$ la pendiente de las rectas tangentes coinciden, es decir, $f'(1) = g'(1)$:

$$f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \rightarrow f'(x) = 8x^3 + 2ax \rightarrow f'(1) = 8 \cdot 1^3 + 2a \cdot 1 = 8 + 2a$$

$$g(x) = -2x^3 + c \rightarrow g'(x) = -6x^2 \rightarrow g'(1) = -6 \cdot 1^2 = -6$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 8 + 2a \\ g'(1) = -6 \end{array} \right\} f'(1) = g'(1) \rightarrow 8 + 2a = -6 \rightarrow 2a = -14 \rightarrow \boxed{a = -7}$$

Sustituyendo en la expresión obtenida anteriormente sacamos el valor de b :

$$a + b = -1 \xrightarrow{a=-7} -7 + b = -1 \rightarrow \boxed{b = 6}$$

De esta forma, las funciones serían:

$$f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$$

$$g(x) = -2x^3 + 3$$

b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$

La función $f(x)$ para $a = b = 1$ queda:

$$f(x) = 2x^4 + x^2 + 1$$

Por tanto, $h(x)$ será:

$$h(x) = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Para calcular las asíntotas, primero debemos conocer el dominio de la función. Al ser una función racional, el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador:

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Por tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

- Asíntotas verticales: $x = a$

La función es continua en todos los puntos excepto en los que se anula el denominador. Por tanto, ese punto ($x = 1$) es el candidato para convertirse en asíntota vertical.

En $x = 1$ hemos visto que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{2 + 1 + 1}{0} = \frac{4}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación se calculan los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \\ \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \end{array}$$

Por tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

- Asíntota horizontal: $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación dejamos en el numerador y en el denominador sólo el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

No hay asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Dejamos numerador y denominador sólo con el término de mayor grado:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1 - 2x^4 + 2x}{x^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \end{aligned}$$

Dejamos numerador y denominador sólo con el término de mayor grado:

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua es: $y = 2x$

- 2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes. Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?**

En primer lugar, se definen las variables del problema:

x : nº de cajas de bombones

y : nº tabletas de chocolate

z : nº paquetes de chocolate en polvo

Ahora, ya podemos plantear las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 24 & \rightarrow \text{Cantidad de chocolate que necesita cada producto} \\ 6x + 4y + 4z = 60 & \rightarrow \text{Cantidad de leche que necesita cada producto} \\ x + y + z = 12 & \rightarrow \text{En total se fabrican 12 unidades de productos} \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \\ x + y + z = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{En forma matricial}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 24 \\ 6 & 4 & 4 & 60 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 24 \\ 6 & 4 & 4 & 60 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 6 & 4 & 4 & 60 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 6F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right)$$

Quedando así:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ -2y - 2z = -12 \\ -3z = -12 \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{-12}{-3} = 4 \xrightarrow{z=4} -2y - 8 = -12 \rightarrow -2y = -4 \rightarrow y = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x + y + z = 12 \xrightarrow{y=2, z=4} x + 2 + 4 = 12 \rightarrow x = 6$$

Por tanto, la solución al sistema es:

$$\boxed{x = 6}$$

$$\boxed{y = 2}$$

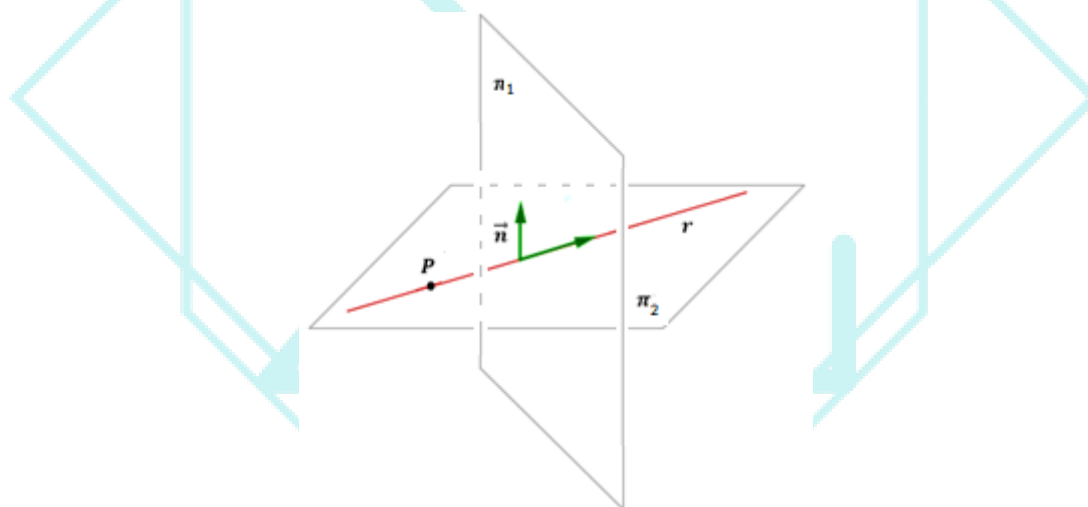
$$\boxed{z = 4}$$

Deben fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 .

En la siguiente figura se muestra la situación planteada:



Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto. Así, el plano π_2 estará formado por el vector director de la recta r ($\vec{u}_r$), el vector normal del plano π_1 ($\vec{n}_1$) y un punto de la recta r (P).

Pasamos la recta r a forma paramétrica para obtener un punto y el vector director:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases} \rightarrow z = \frac{1 + 3x}{4} \xrightarrow{x=\lambda} z = \frac{1 + 3\lambda}{4}$$

$$r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ z = \frac{1 + 3\lambda}{4} \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} y = 2\lambda - 5$$

$$r: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\lambda \end{cases} \rightarrow Q\left(0, -5, \frac{1}{4}\right) \quad \vec{u}_r = \left(1, 2, \frac{3}{4}\right)$$

Para simplificar los cálculos posteriores vamos a buscar otro punto de la recta y un vector director proporcional sin fracciones:

$$Q\left(0, -5, \frac{1}{4}\right) \xrightarrow{\lambda=1} \begin{aligned} x &= 0 + 1 = 1 \\ y &= -5 + 2 \cdot 1 = -3 \\ z &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = 1 \end{aligned} \rightarrow P(1, -3, 1)$$

$$\vec{u}_r = \left(1, 2, \frac{3}{4}\right) \xrightarrow{\text{multiplicando por 4}} \vec{u}_r = (4, 8, 3)$$

Por tanto, el plano π_2 estará formado por:

$$\vec{u}_r = (4, 8, 3)$$

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 3)$$

$$P(1, -3, 1)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi': \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \\ u_{nx} & u_{ny} & u_{nz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 3 & z - 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$[24 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y + 3) - 4 \cdot (z - 1)] - [8 \cdot (z - 1) - 3(x - 1) + 12(y + 3)] =$$

$$[24x - 24 + 3y + 9 - 4z + 4] - [8z - 8 - 3x + 3 + 12y + 36] =$$

$$27x - 9y - 12z - 42$$

$$\pi_2: 27x - 9y - 12z - 42 = 0$$

b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección.

Para hallar el punto de intersección debemos escribir la recta r en forma paramétrica y sustituir en la ecuación general del plano. Una vez calculado λ , sustituimos su valor en la ecuación paramétrica de la recta r y así obtenemos las coordenadas del punto de intersección:

$$r: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\lambda \end{cases} \xrightarrow{\text{sustituimos en la ecuación del plano}} \pi_1 \equiv \lambda - (-5 + 2\lambda) + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\lambda\right) = 12$$

$$\lambda + 5 - 2\lambda + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\lambda = 12 \rightarrow \lambda - 2\lambda + \frac{9}{4}\lambda = 12 - 5 - \frac{3}{4}$$

$$4\lambda - 8\lambda + 9\lambda = 48 - 20 - 3 \rightarrow 5\lambda = 25 \rightarrow \lambda = 5$$

Sustituyendo en r :

$$\begin{aligned}x &= 0 + \lambda = 0 + 5 = 5 \\y &= -5 + 2\lambda = -5 + 2 \cdot 5 = 5 \\z &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\lambda = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = 4\end{aligned}$$

Por tanto, el punto de intersección de la recta y el plano es $(5, 5, 4)$.

4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.

Como el resultado de cada análisis es independiente del anterior y la probabilidad de que sean erróneos es la misma en cada intento, estamos ante una distribución binomial $B(n, p)$, donde:

n : nº de análisis que se realizan

p : probabilidad de que sean erróneos

En este caso:

$$n = 10$$

$$p = 0,08$$

Así, la probabilidad de que sean erróneos 3 o más análisis es:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

La función de probabilidad de esta función es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

siendo:

k : nº éxitos (que sean erróneos)

q : probabilidad de fracaso (que no sean erróneos)

En este caso, el número de éxitos va variando y la probabilidad de fracaso es:

$$q = 1 - p = 1 - 0,08 = 0,92$$

Así, la probabilidad de que sean erróneos 0, 1 y 2 análisis son, respectivamente:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,08^0 \cdot 0,92^{10-0}$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,08^1 \cdot 0,92^{10-1}$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^{10-2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} = 1$$

$$\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

Así,

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,08^0 \cdot 0,92^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,43 = 0,43$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,08^1 \cdot 0,92^{10-1} = 10 \cdot 0,08 \cdot 0,92^9 = 0,38$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^{10-2} = 45 \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^8 = 0,15$$

Por tanto:

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - (0,43 + 0,38 + 0,15) = 0,042$$

La afirmación es falsa, la probabilidad es del 4,2%, por lo que no es menor al 3%.

b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.

La probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,08^3 \cdot 0,92^{10-3}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

$$P(X = 3) = 120 \cdot 0,08^3 \cdot 0,92^7 = 0,034$$

En este caso la afirmación es falsa también, la probabilidad es del 3,4%, por lo que no es menor al 3%.

c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8.

En este caso nos preguntan por el número de análisis correctos (no por los erróneos, como en los apartados anteriores). Por tanto, en la distribución binomial $B(n, p)$:

$$n: \text{nº de análisis que se realizan} \rightarrow n = 100$$

$$p: \text{probabilidad de que sean correctos} \rightarrow p = 0,92$$

La media se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,92 = 92$$

Por tanto, esta afirmación también es falsa. Se estima en 92 el número de análisis correctos esperados, siendo 8 los erróneos que se esperan obtener.

