

|                                                                                            |                       |                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------------------------|
| Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado<br><b>Castilla y León</b> | <b>MATEMÁTICAS II</b> | <b>EJERCICIO</b><br><br><b>Nº Páginas: 2</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------------------------|

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

**2.- CALCULADORA:** Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

**CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

### E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real  $a$ . **(1,2 puntos)**
- b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro  $a = -1$ . **(0,8 puntos)**

### E2.- (Álgebra)

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

- a) Indique para qué valores de  $a$  existe la matriz inversa  $A^{-1}$ . **(0,5 puntos)**
- b) Si  $a = 4$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , encuentre la matriz  $X$  que verifica que  $B + XA = C$ . **(1,5 puntos)**

### E3.- (Geometría)

Sea el plano  $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ , la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$  y el punto  $A = (1, 3, -1)$ .

Hallar la ecuación del plano que pasa por  $A$ , es paralelo a  $r$  y perpendicular a  $\pi$ .

**(2 puntos)**

### E4.- (Geometría)

Dado el punto  $A = (1, 2, 4)$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$ ,

- a) Hallar un punto  $B$  de la recta  $r$  de forma que el vector  $\overrightarrow{AB}$  sea paralelo al plano  $\pi \equiv x + 2z = 0$ . **(1,5 puntos)**
- b) Hallar un vector  $(a, b, c)$  perpendicular a  $(1, 0, -1)$  y  $(2, 1, 0)$ . **(0,5 puntos)**

### E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función  $f(x) = xe^x$ , calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

**E6.- (Análisis)**

Demuestre que la ecuación  $x^3 - 12x = -2$  tiene una solución en el intervalo  $[-2,2]$  y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

**E7.- (Análisis)**

a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$ . **(1 punto)**

b) Calcular  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$ . **(1 punto)**

**E8.- (Análisis)**

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones  $f(x) = \frac{2}{x}$  y  $g(x) = 3 - x$ . **(0,5 puntos)**

b) Sabiendo que en el intervalo  $[1,2]$  se verifica que  $g(x) \geq f(x)$  calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. **(1,5 puntos)**

**E9.- (Probabilidad y estadística)**

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. **(1 punto)**

b) Tenga un peso superior a 85 kg. **(1 punto)**

**E10.- (Probabilidad y estadística)**

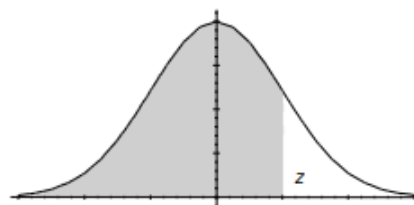
La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

## ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de  $z$ .



| $z$        | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    | ,09    |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>0,0</b> | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| <b>0,1</b> | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| <b>0,2</b> | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| <b>0,3</b> | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| <b>0,4</b> | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| <b>0,5</b> | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| <b>0,6</b> | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| <b>0,7</b> | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| <b>0,8</b> | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| <b>0,9</b> | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| <b>1,0</b> | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| <b>1,1</b> | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| <b>1,2</b> | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| <b>1,3</b> | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| <b>1,4</b> | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| <b>1,5</b> | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| <b>1,6</b> | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| <b>1,7</b> | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| <b>1,8</b> | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| <b>1,9</b> | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| <b>2,0</b> | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| <b>2,1</b> | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| <b>2,2</b> | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| <b>2,3</b> | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| <b>2,4</b> | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| <b>2,5</b> | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| <b>2,6</b> | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| <b>2,7</b> | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| <b>2,8</b> | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| <b>2,9</b> | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| <b>3,0</b> | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

**E1.- (Álgebra)** Se considera el sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real  $a$ . (1,2 puntos)

Emplearemos el teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello, hay que calcular el determinante de la matriz y de la matriz ampliada para los distintos valores que puede tomar el parámetro  $a$ .

En primer lugar, escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (A^*) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & a & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándolo a cero podemos averiguar los valores que debe tomar el parámetro  $a$  para que se anule el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = (2 + a^2) - (2 - a) = a^2 + a = a \cdot (a + 1)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \rightarrow a \cdot (a + 1) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}$$

Por tanto, distinguimos entre los siguientes casos:

- Caso 1:  $a \neq 0, a \neq -1$

$$(A) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{array} \right) \quad (A^*) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & a & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3 \quad |A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) = n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)} \\ \text{Solución única}$$

- Caso 2:  $a = -1$

$$(A) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad (A^*) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Tomamos un determinante de  $A$  de grado menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

Por tanto:

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

- Caso 3:  $a = 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

Tenemos que comprobar un determinante de orden menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

Por tanto:

$$|A^*| \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 2$$

Como:

$$rg(A) = rg(A^*) \neq n^{\circ} \text{incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI)} \\ \text{Infinitas soluciones}$$

**b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro  $a = -1$ . (0,8 puntos)**

Si  $a = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = z \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - x = 0 \\ 2x - y - 2x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -y = 0 \\ -y = 0 \end{array}$$

Dos ecuaciones son linealmente dependientes. Para resolver este sistema, de infinitas soluciones, es necesario fijar parámetros:

$$N^{\circ} \text{ parámetros} = N^{\circ} \text{ incógnitas} - N^{\circ} \text{ ecuaciones no nulas} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto, hay que fijar un parámetro:

$$z = \lambda$$

Resolviendo el sistema en función de este parámetro:

$$x = z \xrightarrow{z=\lambda} x = \lambda$$

$$y = 0$$

Así, las soluciones son:

$$x = \lambda$$

$$y = 0$$

$$z = \lambda$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**E2.- (Álgebra)** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

**a) Indique para qué valores de  $a$  existe la matriz inversa  $A^{-1}$ . (0,5 puntos)**

La inversa de una matriz se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Por tanto, para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a+1) \cdot (a-3) - (a-3) = a^2 - 3a + a - 3 - a + 3 =$$

$$|A| = a^2 - 3a$$

Igualamos a cero:

$$|A| = 0 \rightarrow a^2 - 3a = 0 \rightarrow a \cdot (a - 3) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

En estos dos casos el determinante de  $A$  es nulo, por lo que no existiría la inversa.

Por tanto, cuando  $a \neq 0$  o  $a \neq 3$  la matriz  $A$  es invertible.

b) Si  $a = 4$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

encuentre la matriz  $X$  que verifica que  $B + XA = C$ .

(1,5 puntos)

Despejamos  $X$  de la primera expresión:

$$B + XA = C \rightarrow XA = C - B \rightarrow XA \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}$$

La inversa de la matriz  $A$  se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

Calculamos los términos de la expresión anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

La traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto, teniendo en cuenta la posición que ocupa para asignar el signo.

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +5 \end{pmatrix}$$

Siguiendo este procedimiento:

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +5 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} \rightarrow X = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-1 & 1+5 \\ -1-1 & 1+5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{6}{4} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

**E3.- (Geometría)** Sea el plano  $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ , la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$  y el punto  $A = (1, 3, -1)$ .

Hallar la ecuación del plano que pasa por  $A$ , es paralelo a  $r$  y perpendicular a  $\pi$ .

(2 puntos)

Recordamos que un plano está formado por dos vectores y un punto.

Así, como el plano  $\pi'$  es paralelo a  $r$ , estará formado por el vector director  $\vec{u}_r$ .

$$\text{Como } \pi' \parallel r \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi'_1}} = \vec{u}_r$$

Para obtener el vector director de  $r$  necesitamos pasar su ecuación a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = -1 + 0\lambda \end{cases}$$

Por lo que:

$$\overrightarrow{u_{\pi'_1}} = \vec{u}_r = (1, 1, 0)$$

Como sabemos, el vector normal a un plano es un vector perpendicular al mismo. Por tanto, un vector director del plano  $\pi'$  será el vector normal de  $\pi$ :

$$\text{Como } \pi' \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{u_{\pi'_2}} = \vec{n}_\pi = (1, -2, 2)$$

Como punto, se coge el punto por el que pasa:

$$A = (1, 3, -1)$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dada por el siguiente determinante:

$$\pi': \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \\ u_{\pi_x} & u_{\pi_y} & u_{\pi_z} \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_{\pi'_1}} = \vec{u}_r = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_{\pi'_2}} = \vec{n}_\pi = (1, -2, 2) \end{array} \right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$[2(x - 1) - 2(z + 1)] - [(z + 1) + 2(y - 3)] =$$

$$[2x - 2 - 2z - 2] - [z + 1 + 2y - 6] =$$

$$2x - 2 - 2z - 2 - z - 1 - 2y + 6$$

$$\pi': 2x - 2y - 3z + 1 = 0$$

**E4.- (Geometría)** Dado el punto  $A = (1, 2, 4)$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$ ,

- a) Hallar un punto  $B$  de la recta  $r$  de forma que el vector  $\overrightarrow{AB}$  sea paralelo al plano  $\pi \equiv x + 2z = 0$ . (1,5 puntos)

Para hallar un punto  $B$  de la recta  $r$  debemos pasarla a forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} \xrightarrow{\substack{Pr(1,1,1) \\ \vec{u}_r=(2,1,2)}} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow B(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$

Así, el vector  $\overrightarrow{AB}$  será:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda) - (1, 2, 4) = (2\lambda, -1 + \lambda, -3 + 2\lambda)$$

Que  $\overrightarrow{AB}$  sea paralelo al plano  $\pi$  significa que  $\overrightarrow{AB}$  debe ser perpendicular al vector normal del plano  $\pi$  ( $\vec{n}_\pi = (1, 0, 2)$ ), es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2\lambda, -1 + \lambda, -3 + 2\lambda) \\ \vec{n}_\pi = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow (2\lambda, -1 + \lambda, -3 + 2\lambda) \cdot (1, 0, 2) = 0$$

$$2\lambda - 6 + 4\lambda = 0 \rightarrow -6 + 6\lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 6 \rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, las coordenadas del punto  $B$  pedido serán:

$$B(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + 2\lambda) \xrightarrow{\lambda=1} B(3, 2, 3)$$

**b) Hallar un vector  $(a, b, c)$  perpendicular a  $(1, 0, -1)$  y  $(2, 1, 0)$ . (0,5 puntos)**

Para obtener un vector perpendicular a otros dos hay que hacer el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

Por tanto:

$$(a, b, c) = (1, 0, -1) \times (2, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2\vec{j} + \vec{k}) - (-\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \rightarrow (1, -2, 1)$$

**E5.- (Análisis) Representar gráficamente la función  $f(x) = xe^x$ , calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. (2 puntos)**

Ahora analizamos el **crecimiento** de la función y sus **extremos relativos**. Para ello, obtenemos las raíces de la primera derivada igualándola a cero:

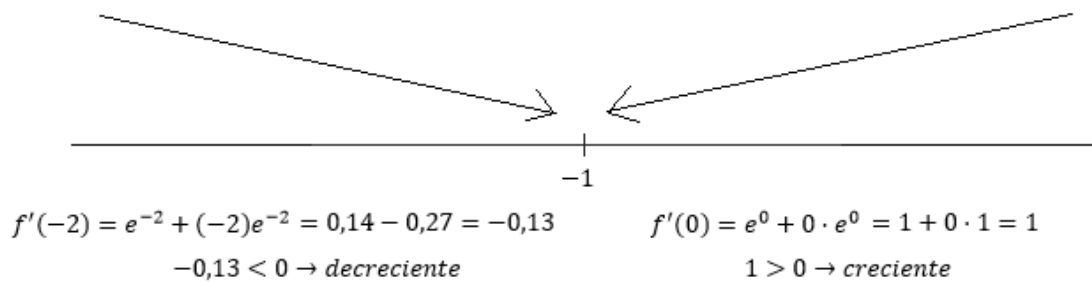
$$f(x) = xe^x \xrightarrow{\text{Regla del producto} \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f} f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot e^x + \frac{d}{dx}(e^x) \cdot x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x \rightarrow f'(x) = e^x + xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + xe^x = 0$$

$$e^x(1 + x) = 0 \quad \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ 1 + x = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Representamos y tomamos un valor de cada intervalo para estudiar el comportamiento de la función antes y después de ese valor:



Por tanto, la función es decreciente de  $(-\infty, -1)$  y creciente de  $(-1, \infty)$ . En  $x = -1$  presenta un mínimo relativo.

Para estudiar la **concavidad y convexidad** hay que hacer la segunda derivada e igualarla a cero:

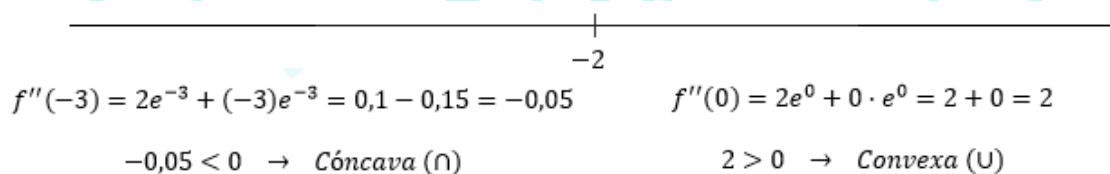
$$f'(x) = e^x + xe^x \rightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^x + xe^x)$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x \rightarrow f''(x) = 2e^x + xe^x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2e^x + xe^x = 0$$

$$e^x(2 + x) = 0 \quad \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ 2 + x = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Estudiamos la segunda derivada antes y después de  $x = -2$ :



Ahora calculamos sus **asíntotas**:

- Asíntotas verticales:  $x = a$

La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ , por tanto, no tiene asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal:  $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = -\infty \cdot 0 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación convierto el producto en división y aplico L'Hôpital:

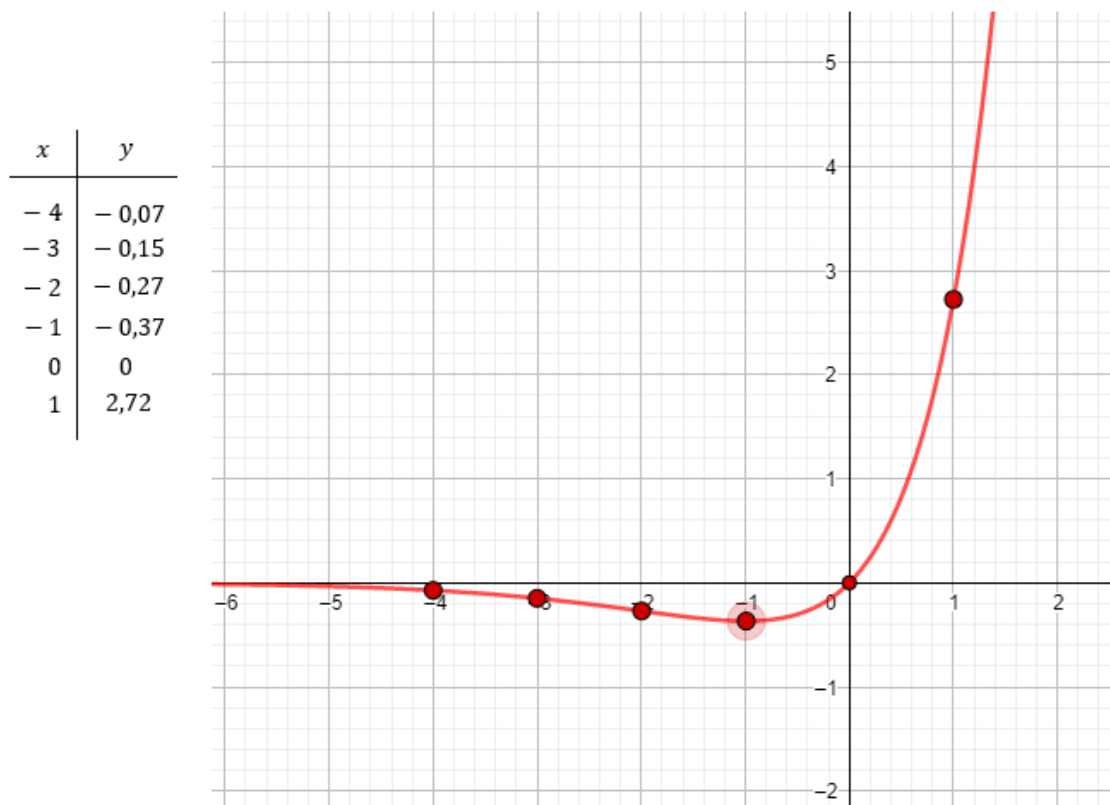
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{\infty}} = \frac{-\infty}{\infty} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Hay asíntota horizontal en  $y = 0$ .

- Asíntota oblicua:  $y = mx + n$

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

Hacemos una tabla de valores y representamos:



**E6.- (Análisis)** Demuestre que la ecuación  $x^3 - 12x = -2$  tiene una solución en el intervalo  $[-2, 2]$  y pruebe además que esa solución es única. (2 puntos)

El teorema de Bolzano estudia las propiedades de las funciones en un intervalo. Según este teorema, si una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $[a, b]$  y toma valores de signos opuestos en los extremos (por lo que de esta forma corta al eje OX), entonces existe al menos una raíz de la función  $f(x)$  en  $(a, b)$ , es decir, existe un punto  $c$  del intervalo  $(a, b)$  en el que se cumple que  $f(c) = 0$ .

Vamos a comprobarlo. En primer lugar, a partir de la ecuación proporcionada planteamos la función a estudiar:

$$f(x) = x^3 - 12x + 2$$

Esta función es continua en todo  $\mathbb{R}$  por ser polinómica, por tanto, cumple el primer requisito, es decir, es continua en el intervalo  $[-2, 2]$ .

Ahora vamos a calcular que valores toma la función en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 2 = -8 + 24 + 2 = 18 \rightarrow f(-2) > 0$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 2 = -14 \rightarrow f(2) < 0$$

Como podemos comprobar, la función toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo, es decir, cumple el segundo requisito.

Por tanto, por el teorema de Bolzano sabemos que existe un punto  $c \in (-2, 2)$  en el que se cumple que  $f(c) = 0$ :

$$f(c) = 0 \rightarrow c^3 - 12c + 2 = 0 \rightarrow c^3 - 12c = -2$$

Por tanto, queda demostrado que  $x^3 - 12x = -2$  tiene alguna solución en  $[-2, 2]$ .

Sin embargo, en el enunciado nos piden que además esa solución sea única. Para comprobarlo emplearemos el teorema de Rolle, que dice que si una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , y toma valores iguales en los extremos ( $f(a) = f(b)$ ), entonces existe un punto donde la primera derivada se anula, es decir, existe un punto  $c$  del intervalo  $(a, b)$  en el que se cumple que  $f'(c) = 0$ .

En este problema vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Como ya hemos dicho, la función  $f(x) = x^3 - 12x + 2$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = 3x^2 - 12$$

Si la igualamos a cero obtenemos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Como ninguno de los dos valores ( $x_1 = -2, x_2 = 2$ ) está en el intervalo  $(-2, 2)$ , la derivada está en contradicción con el teorema de Rolle, lo que permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

### E7.- (Análisis)

a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$ . (1 punto)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} = \frac{e^0 - \cos 0 - 0}{e^0 + \sin 0 - 1} = \frac{1 - 1 - 0}{1 + 0 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación aplico L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{e^x + \cos x} = \frac{e^0 + \sin 0 - 1}{e^0 + \cos 0} = \frac{1 + 0 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

b) Calcular  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$ . (1 punto)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = [-\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right] - [-\cos 0 + \sin 0] =$$

$$[-0 + 1] - [-1 + 0] = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

### E8.- (Análisis)

- a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones  $f(x) = \frac{2}{x}$  y  $g(x) = 3 - x$ . (0,5 puntos)

Como las gráficas se cortan en un punto, hay que igualarlas para calcular el valor de dicho punto:

$$f(x) = g(x) \rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x$$

$$2 = 3x - x^2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, las gráficas se cortan en  $x = 1$  y en  $x = 2$ .

- b) Sabiendo que en el intervalo  $[1, 2]$  se verifica que  $g(x) \geq f(x)$  calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. (1,5 puntos)

El área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones es la integral definida entre 1 y 2 de una función menos la otra. En este caso, como  $g(x) \geq f(x)$ , habrá que integrar  $g(x) - f(x)$ .

$$\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln x\right]_1^2 = \left[3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \ln 2\right] - \left[3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2 \ln 1\right] =$$

$$[6 - 2 - 2 \ln 2] - \left[3 - \frac{1}{2} - 0\right] = -2 \ln 2 + \frac{3}{2} = 0,11 u^2$$

**E9.- (Probabilidad y estadística)** El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

- a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. (1 punto)

Sea  $X$  la variable que representa el peso de un estudiante de 2º de bachillerato:

$$X \sim N(\mu, \sigma) = N(75, 5)$$

Nos piden calcular la probabilidad de que un estudiante al azar tenga un peso de entre 70 y 80 kg:

$$P(70 < X < 80)$$

Como en este caso  $X$  sigue una distribución normal  $N(\mu = 75, \sigma = 5)$ , es necesario tipificar, es decir, hacer un cambio de variable para poder usar la tabla de distribución normal  $N(0,1)$ . Se tipificará la variable  $Z$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Nos preguntan por  $70 < X < 80$ , por tanto:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{70 - 75}{5} < Z < \frac{80 - 75}{5}\right) &= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = \\ &= P(Z < 1) - P(Z > 1) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1)) = \\ &= P(Z < 1) + P(Z < 1) - 1 = 2P(Z < 1) - 1 \end{aligned}$$

Buscamos en la tabla el valor que se corresponde con  $Z = 1$ :

| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    | ,09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,398  | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,793  | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,179  | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,554  | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,915  | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,257  | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,580  | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,881  | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,199  | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |

$$Z = 1 \rightarrow P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 1,6826 - 1 = 0,6826$$

**b) Tenga un peso superior a 85 kg. (1 punto)**

En este caso, nos piden calcular la probabilidad de que un estudiante al azar tenga un peso de mayor a 85 kg:

$$P(X > 85)$$

Como  $X$  sigue una distribución normal  $N(\mu = 75, \sigma = 5)$ , es necesario tipificar para poder usar la tabla de distribución normal  $N(0,1)$ . Se tipificará la variable  $Z$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Nos preguntan por  $X > 85$ , por tanto:

$$P\left(Z > \frac{85 - 75}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

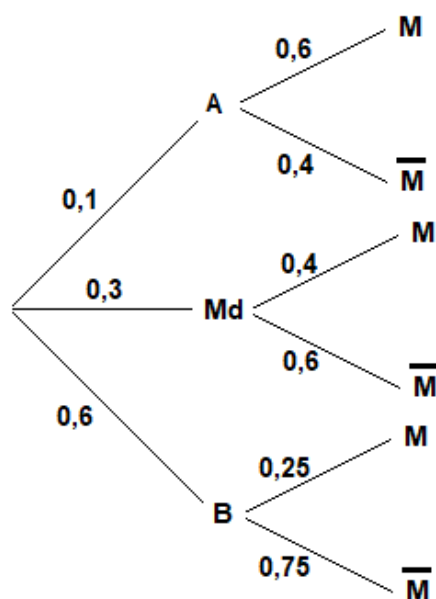
Buscamos en la tabla el valor que se corresponde con  $Z = 2$ :

| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    | ,09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,000  | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,398  | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,793  | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,179  | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,554  | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,915  | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,257  | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,580  | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,881  | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,159  | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,413  | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,643  | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,849  | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,032  | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,192  | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,332  | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,452  | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,554  | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,641  | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,713  | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |

$$Z = 2 \rightarrow P(Z > 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

**E10.- (Probabilidad y estadística)** La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

Construimos el diagrama de árbol:



**A: Tonelaje alto**

**Md: Tonejale medio**

**B: Tonelaje bajo**

**M: Necesita mantenimiento**

**M-bar: No necesita mantenimiento**

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. (1 punto)

La probabilidad de que un barco que llega a puerto necesite mantenimiento es:

$P(M) = \text{Probabilidad de que sea de alto tonelaje y necesite mantenimiento} +$   
 $+ \text{Probabilidad de que sea de medio tonelaje y necesite mantenimiento} +$   
 $+ \text{Probabilidad de que sea de bajo tonelaje y necesite mantenimiento}$

Es decir:

$$P(M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(Md) \cdot P(M|Md) + P(B) \cdot P(M|B) =$$

$$= 0,1 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,06 + 0,12 + 0,15 = 0,33$$

**b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. (1 punto)**

En este apartado nos preguntan sobre probabilidad condicionada. En concreto, nos piden calcular la probabilidad de que el barco sea de tonelaje medio sabiendo que ha necesitado mantenimiento:

$$P(Md|M) = \frac{P(Md \cap M)}{P(M)}$$

$P(Md \cap M)$  establece la probabilidad de que ocurra el suceso  $M$  y ocurra el suceso  $Md$ , es decir:

$$P(Md \cap M) = P(Md) \cdot P(M|Md) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

La probabilidad de que de que un barco que llega a puerto necesite mantenimiento ya la habíamos calculado en el apartado anterior ( $P(M) = 0,33$ ).

Así, tenemos:

$$P(Md|M) = \frac{0,12}{0,33} = 0,36$$